	ANNÉE : 2005/2006 **Parcours : Math.-Info.** **Date :** Jeudi 12 Janvier **Durée :** 1h30 Épreuve de Monsieur Amar	SESSION DE JANVIER 2006 **UE : MAI502** **Heure :** De 8h30 à 10h Documents non autorisés.

Mode d'emploi : On garde la première page contenant l'énoncé et on rend les autres avec les réponses dans la double page d'examen avec le rabat d'anonymat bien rempli. Seules les réponses inscrites dans les places réservées pour seront prises en compte. Donc ne mettez pas d'intercalaires, la place est suffisante.

Probabilités

On considère une urne contenant n_1 boules noires et n_2 boules blanches. tous les tirages se feront avec remise, c.-à-d. que les tirages seront indépendants.

On pourra utiliser les rappels suivants sur les séries géométriques :

$$\text{Si } q < 1 \text{ alors } S(q) := \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\ ;\ S'(q) = \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}.$$

1- Quelle est la probabilité p de tirer une boule noire ?
2- On appelle N la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire. Donner la loi de N.
3- Calculer $\mathbb{E}(N)$.
4- Calculer la probabilité que N soit pair, puis que $N = 2$ sachant que N est pair.

Statistiques

Un coureur automobile doit choisir entre deux types de pneus A et B dont on a étudié l'usure. Le nombre de kilomètres que peut parcourir un pneu A (resp. B) est une variable aléatoire X (resp. Y) qui suit une loi d'espérance θ_A et d'écart-type connu σ_A (resp. θ_B et σ_B connu). Soient $(X_1, ..., X_n)$ et $(Y_1, ..., Y_p)$ des échantillons respectifs indépendants des lois X et Y .

1- Quels estimateurs peut-on choisir pour estimer θ_A et θ_B. Pour quelles raisons ?
2- a) Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ et de $\overline{Y}_p = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} Y_j$.

b) En supposant n et p assez grands, par quelles lois peut-on approcher la loi de $\overline{X}_n$ et celle de $\overline{Y}_p$ et pourquoi ?
3- Pour choisir entre les deux marques, on veut en fait estimer $\theta = \theta_A - \theta_B$.
On pose $T_{n,p} := \overline{X}_n - \overline{Y}_p$. Montrer que $T_{n,p}$ est un estimateur absolument correct de θ.
4- On pose $T_{n,p} := \overline{X}_n - \overline{Y}_p$. Montrer que la loi de $T_{n,p}$ peut être approchée par une $\mathcal{N}(\theta, \sigma)$ avec $\theta = \theta_A - \theta_B$ et $\sigma = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n} + \frac{\sigma_B^2}{p}}$.

TSVP

5- Sur un échantillon de X de taille $n = 35$ et un échantillon de Y de taille $p = 50$ on observe les résultats suivants :

$\overline{x}_n = 20000\ km,\ \overline{y}_p = 25000\ km$ avec $\sigma_A = 2000\ km,\ \sigma_B = 5000\ km.$

a) Donner une estimation de θ au vu de ces résultats.

b) Donner un intervalle de confiance au risque $\alpha = 5\%$ pour θ. Qelle marque choisiriez-vous ?

On pourra utiliser que $\int_{-1,96}^{1,96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} ???x = 0,95$.

Numéro d'anonymat :

Réponses

Probabilité

1-

$$p =$$

2-

$$P(N = n) =$$

3-

$$\mathbb{E}(N) =$$

4-

$$P(N\ pair) =$$

$$P(\{N = 2\} \mid \{N\ pair\}) =$$

Statistiques
1-

2- a)

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}_n) =$$

$$\mathbb{E}(\overline{Y}_p) = \qquad \mathrm{Var}(\overline{Y}_p) =$$

b)

$$I_{5\%} =$$

Numéro d'anonymat :

3-

4-

5- a)

$$\theta_{est} = t_{n,p} =$$

b)

$$I_{5\%} =$$