Liste d'exercices n^o 4

(immersions, submersions, surfaces, sous-variétés)

N.B. : Dans toute la feuille, le terme « surface lisse » est synonyme de « sous-variété de dimension 2 ».

Exercice 1

Les applications suivantes $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ sont-elles des immersions ? Sont-elles injectives ? Si oui, leur image est-elle plongée ? Si oui donner en tout point une équation cartésienne du plan tangent à l'image $f(\mathbf{R}^2)$. Dans chaque cas, on représentera $f(\mathbf{R}^2)$.

1. $f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$,
2. $f(u, v) = (u, v, uv)$,
3. $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \lambda v)$,
4. $f(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v)$.

Exercice 2

Pour $t \in]-\infty, 1[$, on pose $f(t) = (t^2, t - t^3)$. L'application $f]-\infty, 1[\to \mathbf{R}^2$ est-elle une immersion ? Est-elle injective ? Dessiner son image dans le plan.

Exercice 3

Les applications suivantes $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sont-elles des submersions ? Peut-on les restreindre à un voisinage de $f^{-1}(0)$ de telle sorte que la restriction soit une submersion ? Représenter $f^{-1}(0)$.

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$.
2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

Exercice 4

Soit S la nappe paramétrée définie par

$$x(u, v) = u + v, \ y(u, v) = uv, \ z(u, v) = u^2 + v^2 \qquad ((u, v) \in \mathbf{R}^2).$$

1. Vérifier que S est incluse dans la surface d'équation $x^2 - 2y - z = 0$. Les deux surfaces coïncident-elles ?
2. Quelles sont les intersections de S avec les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$?
3. Dessiner S.
4. Donner en tout point une équation du plan tangent à S.
5. En quel(s) point(s) ce plan passe-t-il par l'origine ?

Exercice 5

Soit $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ définie par l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2) + 3x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0.$$

et soit $d : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la distance à l'origine.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est compact. On cherche les extréma de $d_{|\mathcal{C}}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^2$ sauf éventuellement en un point p_0 que l'on précisera.
3. Vérifier que p_0 n'est pas un extrémum de $d_{|\mathcal{C}}$ [on pourra par exemple considérer les intersections de $\mathcal{C}$ avec $x = 1$ et $x = 2$].
4. Prouver que les points réalisant les extrema de $d_{|\mathcal{C}}$ vérifient l'équation $y(x^2+y^2-2x-1) = 0$.
5. En déduire les extrema de $d_{|\mathcal{C}}$ et les valeurs de d en ces points.

T.S.V.P.

Exercice 6

Soit Σ une surface lisse compacte dans $\mathbf{R}^3$. Montrer que pour tout plan vectoriel P, il existe un point de Σ dont le plan tangent vectoriel est égal à P [on pourra considérer $p \in \Sigma$ à distance maximale de P].

Exercice 7 *(sphères)*

1. Montrer que la sphère unité $\mathbf{S}^n$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ (euclidien) est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+1}$.

2. Soit $x \in \mathbf{S}^n$. Donner un paramétrage local régulier de $\mathbf{S}^n$ au voisinage de x.

Exercice 8

Soient $r, R > 0$. Déterminer pour quelles s valeurs de r, R le sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ défini par l'équation

$$(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$$

est une surface lisse, que l'on demande alors de dessiner.

Exercice 9 *(hyperboloïde réglé)*

On pose $H = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2+y^2-z^2 = 1\}$.

1. Prouver que H est une surface lisse et qu'elle est homéomorphe au cylindre d'équation $x^2+y^2 = 1$.

2. Mettre l'équation de H sous la forme $PQ - RS = 0$ avec $P, Q, R, S \in \mathbf{R}[X,Y,Z]$ de degré 1. En déduire qu'il existe deux familles de droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ telles que $H = \cup_{D \in \mathcal{D}} D = \cup_{D' \in \mathcal{D}'} D'$, réunions disjointes. Faire un dessin.

Exercice 10

Soit $f :]-1,1[\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ définie par $f(u,v) = (2+u\cos v)\cos 2v, (2+u\cos v)\sin 2v, u\sin v)$. Prouver que l'image de f est une surface lisse. Faire un dessin.

Exercice 11 *(Contour apparent)*

Soit $G(x,y,z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$ ($(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $a,b,c > 0$) et soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde d'équation $G(x,y,z) = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est une surface lisse. Donner une équation du plan affine H_p tangent à $\mathcal{E}$ en un point donné $p \in \mathcal{E}$.

2. Déterminer les points de $\mathcal{E}$ les plus proches (resp. les plus éloignés) de l'origine $0 \in \mathbf{R}^3$.

Soit $q = (x_0, y_0, z_0)$ un point extérieur à $\mathcal{E}$, c'est-à dire un point pour lequel $G(q) > 1$. On désigne par $C(q)$ l'ensemble des points $p \in \mathcal{E}$ pour lesquels le plan affine tangent H_p contient le point q.

3. Faire un dessin de la situation et préciser pourquoi il est classique de nommer $C(x,y,z)$ le contour apparent de $\mathcal{E}$ vu depuis le point q.

4. Démontrer que $C(q)$ est une courbe dans $\mathcal{E}$ qui est l'intersection de $\mathcal{E}$ avec un plan de $\mathbf{R}^3$ [Indication : si B est la forme bilinéaire symétrique associée à G, on pourra remarquer que $C(q)$ est défini par les équations $G(x,y,z) = 1$ et $B((x,y,z),(x_0,y_0,z_0)) = 1$].

5. En déduire que $C(q)$ est une ellipse.

Exercice 12

Montrer que $\{(u^2, v^2, w^2, \sqrt{2}uv, \sqrt{2}vw, \sqrt{2}wu) \in \mathbf{R}^6; (u,v,w) \in \mathbf{R}^3, u^2+v^2+w^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^6$ (incluse dans la sphère unité).

Exercice 13 *(quelques groupes classiques comme sous-variétés de $\mathbf{R}^N$)*

Dans cet exercice, le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbf{R})$ des matrices à coefficients réels est identifié à $\mathbf{R}^{np}$. La matrice identité d'ordre n est notée I_n.

1. Montrer que les sous-ensembles suivants sont des sous-variétés :

1-a. $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbf{R}); \det(A) = 1\}$ (groupe spécial linéaire).

1-b. $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbf{R}); {}^t AA = I_n\}$ (groupe orthogonal euclidien).

1-c. $\mathbf{Sp}_{2g}(\mathbf{R}) = \{A \in M_{2g,2g}(\mathbf{R}); {}^t AJ_gA = J_g\}$ (groupe symplectique réel), où $J_g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ($g \in \mathbf{N}^*$).

2. Parmi les sous-variétés précédentes, lesquelles sont compactes ?
