DS 1 Statistique inférentielle

Licence 2 MIASHS – 2015/2016

Question de cours : Enoncer le Théorème de Fisher.

Exercice : *Estimation du paramètre d'une loi exponentielle*

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, un n-échantillon de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$ de paramètre inconnu $\theta > 0$. La densité de chacune des variables X_i est donc donnée pour tout x réel par :

$$f(x) = \begin{cases} \theta\, e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, pour $i = 1, \ldots, n$, on rappelle que

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{\theta} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Dans un premier temps, on souhaite estimer $e^{-\theta}$. Pour cela, on propose l'estimateur suivant :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > 1\}}.$$

1) Calculer $\mathbb{E}[T_n]$ et en déduire que T_n est un estimateur sans biais de $e^{-\theta}$.

2) Déterminer la loi de $n\,T_n$. En déduire la variance de T_n.

3) Montrer que T_n converge en probabilité vers $e^{-\theta}$ quand n tend vers l'infini.

4) ***Application :*** pour $n = 8$, on a obtenu la réalisation suivante de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_8)$ `2,1  3,3  4,8  0,5  0,8  1,2  3,1  0,4.` Donner une estimation de $e^{-\theta}$.

On considère maintenant la moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ du n-échantillon $\mathbf{X}$.

5) Calculer $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$ et $\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right)$. En déduire $\mathbb{E}[\overline{X}_n^2]$.

6) Soit $V_n = \overline{X}_n \left(1 - \overline{X}_n\right)$ un estimateur de $\frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)$. Calculer $\mathbb{E}[V_n]$.

7) En déduire que V_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)$.

8) ***Application :*** à partir de la réalisation du 8-échantillon donnée à la question 4, calculer une estimation de $\frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)$.