CORRECTION EXERCICE DS1 STAT. INFÉRENTIELLE

$f(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$; $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\theta}$; $Var(X_i) = \frac{1}{\theta^2}$.

① (1,5pt) $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > 1\}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(X_i)$.

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(X_i)\right).$$

Or $\mathbb{1}_{\{X_i>1\}} = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i > 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Donc $\mathbb{1}_{\{X_i>1\}}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec

$p = P\left(\mathbb{1}_{\{X_i>1\}} = 1\right) = P(X_i > 1) = 1 - P(X_i \leq 1) = 1 - F(1)$.

Calcul de $F(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}$: $F(x) = P(X_i \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} * \ 0 \text{ si } x < 0 \\ * \int_0^x \theta e^{-\theta t}\,dt \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$

Si $x \geq 0$: $F(x) = \left[-e^{-\theta t}\right]_0^x = -e^{-\theta x} + 1 \Rightarrow F(1) = -e^{-\theta} + 1$

$\Rightarrow 1 - F(1) = e^{-\theta}$

D'où : $\mathbb{1}_{\{X_i>1\}} \sim \mathcal{B}(e^{-\theta})$ et $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_i>1\}}\right) = e^{-\theta}$.

Par conséquent : $\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\theta} = \frac{1}{n} n e^{-\theta} = e^{-\theta}$.

Ce qui prouve que T_n est un estimateur sans biais de $e^{-\theta}$.

② (2pt) $nT_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i>1\}}$

Or, les $\mathbb{1}_{\{X_i>1\}} \sim \mathcal{B}(e^{-\theta})$ et sont indépendantes.

Donc $nT_n \sim \mathcal{B}(n, e^{-\theta})$ en tant que somme de n var indépend. de même loi $\mathcal{B}(e^{-\theta})$.

③ (1,5pt) • $\mathbb{E}(T_n) = e^{-\theta}$ (1)

• $Var(T_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i>1\}}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i>1\}}\right)$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left(\mathbb{1}_{\{X_i>1\}}\right)$ car les $\mathbb{1}_{\{X_i>1\}}$ sont indépendantes.

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} e^{-\theta}(1-e^{-\theta})$ (Rapel : $X_i \sim \mathcal{B}(p) \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}(X_i) = p \\ Var\, X_i = p(1-p) \end{cases}$)

$= \frac{1}{n^2}\, n\, e^{-\theta}(1-e^{-\theta}) \Rightarrow Var(T_n) = \frac{e^{-\theta}(1-e^{-\theta})}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (2).

(1) et (2) $\Rightarrow T_n \xrightarrow{P} e^{-\theta}$ d'après le critère de convergence.

④ (1pt) . $T_n := T_8 = \frac{1}{8}\underbrace{\sum_{i=1}^{8} \mathbb{1}_{\{x_i>1\}}}_{\substack{= \text{nbre d'observations} = 5 \\ \text{plus grandes que } 1}} = \frac{1}{8}\left(1+1+1+0+0+1+1+0\right)$

$\Rightarrow \boxed{T_n := \frac{5}{8} = 0{,}625.}$

⑤ (3pt) • $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}$

ou directement : $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\theta}$.

• $Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$ car les X_i sont indép

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{n^2}\, n\, \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{n\theta^2}$

ou directement : $Var(\overline{X}_n) = \frac{Var\, X_i}{n} = \frac{1}{n\theta^2}$.

• $Var(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(\overline{X}_n^2) - \mathbb{E}(\overline{X}_n)^2 \Rightarrow \mathbb{E}(\overline{X}_n^2) = Var\,\overline{X}_n + \mathbb{E}(\overline{X}_n)^2$

$\Rightarrow \mathbb{E}(\overline{X}_n^2) = \frac{1}{n\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} = \frac{1+n}{n\theta^2}$

⑥ (1pt) $\mathbb{E}(V_n) = \mathbb{E}\left(\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)\right) = \mathbb{E}\left(\overline{X}_n - \overline{X}_n^2\right) = \mathbb{E}(\overline{X}_n) - \mathbb{E}(\overline{X}_n^2)$

Donc : $\mathbb{E}(V_n) = \frac{1}{\theta} - \frac{n+1}{n\theta^2} = \begin{cases} \frac{n\theta - n - 1}{n\theta^2} = \frac{n(\theta-1)-1}{n\theta^2} \\ \text{ou bien :} \\ \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{n+1}{n}\frac{1}{\theta}\right) \end{cases}$

7 $\mathbb{E}(V_n) = \frac{n(\theta-1)-1}{n\theta^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\theta-1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$

(1 pt)

ou bien : $\mathbb{E}(V_n) = \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{n+1}{n}\frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$

Ainsi V_n forme une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais de $\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$.

8 $V_n = \overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$.

(1 pt)

$\overline{X}_n := \frac{2{,}1 + \dots + 0{,}4}{8} = 2{,}025 \Rightarrow V_n := 2{,}025 \times (1 - 2{,}025) \simeq -2{,}076$