Eléments de corrigé : Calcul différentiel

Exercice 1 : f est un polynôme de degré 2 en α et β donc est C^∞.

(α, β) est un point critique équivaut à : $Df_{(\alpha,\beta)} = 0$

équivaut à $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = 0 = -2 \sum_{i=1}^{n} (b_i - (\alpha a_i + \beta)) \times a_i \\ \frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = 0 = -2 \sum_{i=1}^{n} b_i - (\alpha a_i + \beta) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\alpha + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\alpha + n\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i \end{cases}$$

La matrice de ce système linéaire est :

$$\begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) & \sum_{i=1}^{n} a_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i & n \end{pmatrix}$$

Son déterminant est : $n \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$.

Or par Cauchy-Schwarz $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} (a_i^2)$

$$\overset{\shortparallel}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1\right)^2}$$

avec égalité si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Ici, il existe i, j tel que $a_i \neq a_j$, donc l'inégalité ci-dessus est stricte.

Le déterminant est donc > 0

Le système linéaire admet donc une unique solution (α_0, β_0).

(que l'on pourrait facilement calculer !).

2) $$\text{Hess } f(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(\alpha,\beta) & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}(\alpha,\beta) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha}(\alpha,\beta) & \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}(\alpha,\beta) \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} (a_i^2) & \sum_{i=1}^{n} a_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i & n \end{pmatrix}$$

On a vu : $\det(Hf(\alpha_0,\beta_0)) > 0$

On $\text{tr}(Hf(\alpha_0,\beta_0)) > 0$

donc $Hf(\alpha_0,\beta_0)$ est une matrice symétrique

définie positive

donc (α_0,β_0) est un minimum local.

3) Si g continue et coercive.

. Pour $A = g(0)$, $\exists R \geq 0$, si $|x| \geq R$, $g(x) \geq g(0)$

. $B(0,R)$ est compact donc g atteint son minimum

en (au moins) un point $x_0 \in B(0,R)$

• Si $x \in B(0,R)$, on a $g(x) \geq g(x_0)$

et si $x \notin B(0,R)$, $g(x) \geq g(0) \geq g(x_0)$

donc g admet et atteint son minimum.

4) $f(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - (\alpha a_i + \beta))^2$.

Si $\|(\alpha,\beta)\| \to +\infty$, les a_i étant non constants,

il existe i_0 tel que $|\alpha a_{i_0} + \beta| \to +\infty$.

d'où $f(\alpha,\beta) \underset{\|(\alpha,\beta)\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (i.e. f est coercive).

On en déduit que f admet (au moins) un minimum global.

Or f n'admet qu'un seul minimum local.

donc ce minimum local est nécessairement global.

Rq: On aurait aussi pu utiliser la convexité de f pour obtenir que le minimum local était global.

Exercice 2 :

1) Le polynôme de Taylor de f en a d'ordre n est :

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)$$

2) Par la formule de Taylor-reste intégral (ou Taylor-Lagrange)

Pour tout $x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a) \right| = \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+t(x-a))\,dt \right|$$

$$\leq \frac{K_{n+1}|x-a|^{n+1}}{n!} \underbrace{\int_0^1 (1-t)^n\,dt}_{= \frac{1}{n+1}}$$

$$\leq \frac{K_n |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) Soit $a \in I$ et considérons les $\varepsilon > 0$, M, R donnés dans l'énoncé :
pour $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$, avec $0 < \alpha < \varepsilon$, on a

$$|f(x) - T_{n,f,a}(x)| \leq \frac{M R^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leq M(\alpha R)^{n+1}.$$

donc si $\alpha < \frac{1}{R}$ (et $\alpha < \varepsilon$, i.e. $\alpha < \min(\varepsilon, \frac{1}{R})$).

~~Pour tout~~ $(\alpha R)^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On en déduit que $T_{n,f,a}$ converge uniformément sur $[a-\alpha, a+\alpha]$ vers f.

Et donc pour tout $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$