Corrigé : Composition Equa Diff

Exercice 1 : (E) $y'(t) = f(t, y(t))$

avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée.

Soit y une solution maximale.
Supposons par l'absurde que y est définie sur $]a, b[$
avec $a \neq -\infty$ ou $b \neq +\infty$.
Supposons ici que $b \neq +\infty$.

Soit $t_0 \in]a, b[$.
y étant solution de (E)
$|y'(t)| \leq M$ pour tout $t \in]a, b[$
et pour $t \geq t_0$.

$$|y(t) - y(t_0)| \leq \int_{t_0}^{t} |y'(s)|\,ds \leq M(t - t_0)$$
$$\leq M(b - t_0).$$

donc y est bornée au voisinage de b.
Par le théorème des bouts, y peut se prolonger au delà de b. Contradiction avec y maximale.

Donc $b = +\infty$.

De même $a = -\infty$.

Les solutions maximales sont donc globales.

Exercice 2 : (Zuily - Queffelec).

Soit. (E) $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$.

Rq: Posons $Y=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $F\left(x,\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} y_1 \\ -q(x)y_0-p(x)y_1 \end{pmatrix}$

$$D_Y F=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

Donc $|||D_Y F(x,Y)||| \leq C_r$

pour tout $(x,Y)\in[-r,r]\times\mathbb{R}^2$

F est donc globalement Lipschitzienne par rapport à Y sur $[-r,r]\times\mathbb{R}^2$ et $0<r<R$

on voit donc que pour une équation linéaire, par Cauchy-Lipschitz,

les solutions maximales sont globales.

Rq: On n'a pas vraiment besoin de ce résultat a priori ici.

On va montrer qu'il existe une unique série entière

solution de (E) sur $]-R,R[$ avec $\begin{cases} y(0)=c_0 \\ y'(0)=c_1 \end{cases}$.

1) Supposons que y est développable en série entière sur $]-R,R[$

et que y est solution de (E).

En utilisant le produit de Cauchy et la dérivation des

séries entières, on montre que

y est solution de (E) sur $]-R,R[$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[$

$$\sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1)a_{n+2}\,x^n = -\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}(n+1-j)\,a_{n+1-j}\,p_j\right)x^n - \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\,q_j\right)x^n.$$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 0,\quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -\sum_{j=0}^{n}(n+1-j)(a_{n+1-j})p_j - \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\,q_j \qquad (*)$

car une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

La connaissance de a_0 et a_1 permet de déterminer a_2 puis par récurrence a_n pour tout $n\geq 2$.

On a $y(0)=a_0$ et $y'(0)=a_1$.

Donc s'il existe une série entière solution de (E) et vérifiant $\begin{cases} y(0)=c_0 \\ y'(0)=c_1 \end{cases}$

Elle est unique et vérifie $\begin{cases} a_0=c_0 \\ a_1=c_1 \end{cases}$ puis vérifie $(*)$ pour tout $n\geq 0$.

2) Montrons qu'il existe $C > 0$ tel que

$(n+2)(n+1)\, p_n \leq \dfrac{C}{r^{n-1}}$ et $|q_n| \leq \dfrac{C}{r^n}$.

$\ast$) Le rayon de convergence de p est donné par :

$\sup \{ \rho > 0$ tel que $|p_n| \rho^n$ est borné $\}$

Il est supérieur à R.

donc si $r < R$, on prend r' avec $r < r' < R$.

et $\exists C_1$, $|p_n| (r')^n \leq C_1$ pour tout $n \geq 0$.

or $(n+2)(n+1) |p_n| \, r^{n-1}$

$$\leq |p_n| (r')^n \underbrace{(n+2)(n+1)\left(\frac{r}{r'}\right)^n \times \frac{1}{r}}_{\to 0}$$

La suite $(n+2)(n+1)\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n \times \dfrac{1}{r}$ tend vers 0, donc

est borné par C_2.

Posons $C_p = C_1 \times C_2$,

on a alors : $(n+2)(n+1)\, |p_n| \leq \dfrac{C_p}{r^{n-1}}$.

De même, il existe $C_q > 0$ tel que

$$|q_n| \leq \frac{C_q}{r^n}.$$

Prenons $C = \max(C_p, C_q)$.

On a alors pour tout $n \geq 0$.

$$(n+2)(n+1)|p_n| \leq \frac{C}{r^{n-1}} \quad \text{et} \quad |q_n| \leq \frac{C}{r^n}.$$

3) Soit $M > 0$.

Soit $n \geq 0$ et supposons que pour tout $0 \leq k \leq n+1$,

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}. \qquad (**)$$

On a alors : $(n+2)(n+1)|a_{n+2}|$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} (n+1-j)|a_{n+1-j}||p_j| + \sum_{j=0}^{n} |a_{n-j}| q_j$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} (n+1-j) \frac{M}{r^{n+1-j}} \frac{1}{(j+2)(j+1)} \frac{C}{r^{j-1}} + \sum_{j=0}^{n} \frac{M}{r^{n-j}} \frac{C}{r^j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (n+1-j) \frac{1}{(j+1)(j+2)} \frac{MC}{r^n} + \sum_{j=0}^{n} \frac{MC}{r^n}$$

$$\leq (n+1) \frac{MC}{r^n} \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)(j+2)} + 1 \right]$$

On $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)(j+2)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)} - \frac{1}{(j+2)}$

$$= 1 - \frac{1}{n+2} \leq 1.$$

donc $(n+2)(n+1)|a_{n+2}| \leq \frac{2(n+1)MC}{r^n}$.

et $|a_{n+2}| \leq \left(\frac{2Cr^2}{n+2}\right) \frac{M}{r^{n+2}}$.

4) On a : $\frac{2Cr^2}{n+2} \leq 1 \iff n \geq 2Cr^2 - 1$.

On pose $N = \lfloor 2Cr^2 \rfloor$.

On remarque donc que si $n \geq N+1$ et vérifie pour tout $0 \leq k \leq n$, $|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$

alors a_{n+1} vérifie $|a_{n+1}| \leq \frac{M}{r^{n+1}}$.

(On remarque que la valeur de N ne dépend pas de M).

5) Pour initialiser la récurrence, on pose donc

$M = \max \{ |a_i| r^i \;/\; 1 \leq i \leq N+1 \}$.

La récurrence forte précédente montre alors

que pour tout $n \geq 0$ $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$.

6) Ceci signifie que le rayon de convergence de $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

est supérieur à r.

Ceci est vrai pour tout $0 < r < R$.

En faisant tendre r vers R, on voit que le rayon de convergence de y est $\geq$ à R.