Prépa Agreg Bordeaux 2016/2017

Corrigé Composition 1

Exercice 1.

- Soit $\alpha > 1$. Soit $p > n$,

on a : $$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |u_{k+1} - u_k|$$
$$\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{k^\alpha}$$
$$\leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha}$$

$\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha}$ est le reste d'une série convergente donc tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

$(u_n)_n$ est donc une suite de Cauchy donc converge.

- Pour $0 < \alpha \leq 1$, on ne peut pas conclure. Voici un contre-exemple :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \left(\text{ou } u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$$

vérifie l'hypothèse mais ne converge pas

Exercice 2 :

1) On a l'équivalent $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

et donc $\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Les séries, à termes positifs, $\sum \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right|$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ont donc même nature. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Donc $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ ne converge pas absolument.

2) Puisque $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$ lorsque $x \to 0$,

on a $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

terme général d'une série CV (critère des séries alternées)

série DV

série CV

La série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est donc divergente.

Exercice 3

1) On a $\left|\frac{a_n}{n^z}\right| = \frac{|a_n|}{n^{\mathrm{Re}\, z}} \leq \frac{M}{n^{\mathrm{Re}\, z}}$

donc $\sum \frac{a_n}{n^z}$ est absolument convergente pour z tel que $\mathrm{Re}\, z > 1$.

2) Par intégration par parties, pour $k \geq 1$

$$\int_k^{k+1} 1 \cdot \frac{1}{t^{1+i\theta}}\, dt = \left[(t-k) \frac{1}{t^{1+i\theta}} \right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} (t-k) \frac{1+i\theta}{t^{2+i\theta}}\, dt$$

$$= \frac{1}{(k+1)^{1+i\theta}} + \int_k^{k+1} \{t\} \frac{1+i\theta}{t^{2+i\theta}}\, dt$$

En sommant de $k = 1$ à $N-1$, on obtient

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{1+i\theta}} = \int_1^N \frac{1}{t^{1+i\theta}}\, dt - \int_1^N \{t\} \frac{1+i\theta}{t^{2+i\theta}}\, dt.$$

Donc $\left| \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{1+i\theta}} \right| \leq \left| \int_1^N \frac{1}{t^{1+i\theta}} dt \right| + \int_1^N |\{t\}| \frac{|1+i\theta|}{|t^{2+i\theta}|}\, dt$

On a $|\{t\}| \leq 1$, $|1+i\theta| \leq 1+|\theta|$ et $|t^{2+i\theta}| = t^2$

et $\int_1^N \frac{1}{t^2}\, dt = 1 - \frac{1}{N} \leq 1.$

Pour la première intégrale,

$$\int_1^N \frac{1}{t^{1+i\sigma}}\,dt = \left[-\frac{1}{i\sigma}\,\frac{1}{t^{i\sigma}} \right]_1^N = \frac{1}{i\sigma}\left(1 - \frac{1}{N^{i\sigma}}\right)$$

d'où $\left| \int_1^N \frac{1}{t^{1+i\sigma}}\,dt \right| \leq \frac{2}{\sigma}$.

D'où : $\left| \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{1+i\sigma}} \right| \leq \frac{2}{\sigma} + (1+\sigma)$

3) Si $a_n \searrow 0$, on peut donc déduire du critère d'Abel que $\sum_n \frac{a_n}{n^{1+i\sigma}}$ est convergente.

Exercice 4 :

(A) 1) Soit $a \in \mathbb{N}^*$, et $n \geq a$

Par division euclidienne de n par a, il existe $q \geq 1$ et $0 \leq r \leq a-1$, tel que

$$n = aq + r$$

On a donc $u_n \leq u_{qa} + u_r$

On vérifie par récurrence que $u_{qa} \leq q u_a$.

d'où $u_n \leq q u_a + u_r$

et $$\frac{u_n}{n} \leq \frac{q}{n} u_a + \frac{u_r}{n} \quad (*)$$

$$\leq \frac{u_a}{a} + \frac{\max(u_0, \dots, u_{a-1})}{n}.$$

Car $\frac{q}{n} = \frac{q}{aq+r} \leq \frac{1}{a}$ si $u_n \geq 0$.

(Dans le cas général, u_n de signe quelconque il faut d'abord, à partir de $(*)$, prendre la limsup en n.

On a : $$\frac{aq}{n} = \frac{n-r}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et $$\frac{\max(u_0, \dots, u_{a-1})}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } a \text{ fixé}$$

d'où :

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_a}{a}$$

Prenons maintenant l'infimum en a ;

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \inf_{a\geq 1} \frac{u_a}{a} \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \sup_n \inf_{p\geq n} \frac{u_p}{p}$$

d'où $\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \liminf_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{u_n}{n} \in [-\infty,+\infty[$

donc $\frac{u_n}{n}$ admet une limite appartenant à $[-\infty, \infty[$.

3) Posons $v_n = u_n + M$

on a alors $v_{n+m} = u_{n+m} + M \leq \underbrace{u_n + u_m + 2M}_{= v_n + v_m}$

donc $(v_n)_n$ est une suite sous additive.

et $\frac{u_n}{n} = \frac{v_n}{n} - \frac{M}{n}$ donc $\lim_n \frac{u_n}{n} = \lim_n \frac{v_n}{n} \in [-\infty, \infty[$.

(B) Nombre de rotations :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et f croissante.

On vérifie facilement que :

$$f(x+h) = f(x) + h \quad , h \in \mathbb{N}$$

et $f^{(n)}(x+h) = f^{(n)}(x) + h \quad , h \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

1) Posons $u_n = f^{(n)}(0)$

on a $f^{m+n}(0) = f^m(f^n(0))$

En posant $h = \lfloor f^{(n)}(0) \rfloor$, on a :

$$h \leq f^n(0) < h+1$$

et par croissance de f^m,

$$\underset{\underset{\displaystyle f^m(0)+h}{\shortparallel}}{f^m(h)} \leq f^{m+n}(0) \leq \underset{\underset{\displaystyle f^m(0)+h+1}{\shortparallel}}{f^m(h+1)}$$

$$f^m(0)+h \geq f^m(0)+f^n(0)-1$$

$$f^m(0)+h+1 \leq f^m(0)+f^n(0)+1$$

donc $-1 \leq u_{n+m} - u_n - u_m \leq 1$

La suite $u_n + 1$ est sous additive

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$ existe et appartient à $[-\infty, \infty[$

La suite $-u_n + 1$ est aussi sous additive

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{u_n}{n}\right)$ existe et appartient à $[-\infty, \infty[$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R}$.

2) Pour $x \geq 0$, (le cas $x < 0$ se traite de la même manière).

il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq x \leq h$

d'où $f^n(0) \leq f^n(x) \leq f^n(h) = f^n(0)+h$

et $\frac{f^n(0)}{n} \leq \frac{f^n(x)}{n} \leq \frac{f^n(0)}{n} + \frac{h}{n}$

Par le lemme des gendarmes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(x)}{n}$ existe et est égale à $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n}$.

d'où la conclusion.

(c) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

On a : $u_{n+m} = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n+m}\sum_{i=1}^{n+m} X_i \geq a\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+m} X_i \geq a(n+m)\right)$$

$$\geq \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a n\right\} \cap \left\{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i \geq a m\right\}\right)$$

indépendance

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right) \mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i \geq a\right)$$

même loi

$$= u_n . u_m \qquad \left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \geq a\right)\right)$$

. Donc $u_{n+m} \geq u_n u_m$

$u_n \in [0,1]$

Si $u_n \in]0,1]$, $(-\ln u_n)$ est sous additive (et ≥ 0)

et $\lim\limits_{n} -\frac{1}{n} \ln u_n$ existe et appartient à $[0,+\infty[$.

. (Rq : si $u_1 > 0$, $u_n \geq u_1^n > 0$)

(Si $u_n = 0$, $-\ln u_n = +\infty$).