Composition 1

8 septembre 2014

durée 2h

Exercice 1. (Lemme de Kronecker)

1) (Césaro généralisé.) Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante telle que $b_0 = 0$, $b_n > 0, n \geq 1$ et $b_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente vers une limite l. Montrer que

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1})s_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l.$$

2) Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante telle que $b_n > 0, n \geq 1$ et $b_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Soit $\Sigma_{n\geq 1}u_n$ une série convergente. Montrer que

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication: On pourra utiliser une transformation d'Abel.

3) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que la série $\sum \frac{x_n}{n}$ converge. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 2. (Un premier pas vers Stirling)

1) Soit $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}, n \geq 1$ et $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}), n \geq 2$. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente.

2) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3. Séries de Hardy

Dans ce problème, on étudie la convergence de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ en fonction du paramètre $\alpha > 0$.

1) Que dire si $\alpha > 1$?

2) Traiter le cas $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ en comparant avec une intégrale.

3) Montrer qu'on a $e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}} = \dfrac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \dfrac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ quand $n \to \infty$.

4) Traiter le cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

5) Traiter enfin le cas $\alpha < \frac{1}{2}$, en écrivant $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$.