Prépa-agreg 2016-2017 Université de Bordeaux

Composition

10 octobre 2016
durée 2h

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; puis calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.
2) Montrer que la fonction f admet aussi des dérivées partielles en $(0,0)$.
3) Les dérivées partielles de f sont-elles continues en $(0,0)$?
4) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit saclaire usuel $< \cdot, \cdot >$ et $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. Soit f la fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) =< a, x > e^{-|x|^2}.$$

Montrer que f possède 2 points critiques. Calculer la différentielle seconde $D^2 f$ puis donner la nature (locale et globale) des points critiques.

Exercice 3. On considère $E = M_n(\mathbb{R})$ et l'application det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

On rappelle que le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice.

1) Pour $1 \leq i,j \leq n$ où $t \in \mathbb{R}$ on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire n'ayant que des 0 sauf un 1 à la place (i,j).

Calculer $\det(Id + tE_{i,j})$. En déduire l'existence des dérivées dans les directions $E_{i,j}$ de la fonction determinant en l'identité.

2) En déduire que pour $H \in M_n(\mathbb{R})$

$$D\det_{Id}(H) = \mathrm{trace}(H).$$

3) Soit X une matrice inversible en déduire que pour $H \in M_n(\mathbb{R})$

$$D\det_X(H) = \mathrm{trace}(\det(X)X^{-1}H).$$

Exercice 4. théorème du rang constant Soient $n, p \geq 1$. On suppose que $n < p$ et on considère $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $0 \in U$ et que $f(0) = 0$.

On suppose de plus que la matrice jacobienne de f en 0 est de rang maximal n.

1) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_p$ une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$ et $\phi_\sigma : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ définie par

$$\phi_\sigma(x_1, \ldots, x_p) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}).$$

Calculer la différentielle $D\phi_\sigma$. En déduire qu'il existe $\tau \in \mathcal{S}_p$ telle que les n premières lignes de la matrice jacobienne de $\phi_\tau \circ f$ en 0 sont linéairement indépendantes. On pose alors $g = \phi_\tau \circ f$.

2) On pose

$$F : \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^{p-n} & \to & \mathbb{R}^p \\ (x, y) & \mapsto & g(x) + (0, y). \end{array}$$

Montrer que F réalise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $U \times \mathbb{R}^{p-n}$ vers un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$.

3) En déduire qu'il existe un difféomorphime ψ défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$ tel que pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$,

$$\psi \circ f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$