

Feuille 5

Exercice 1. (comparaison série-intégrale 2)

A Soit $a \in \mathbb{N}$, et soit $f : [a; \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1 Montrer que pour tout entier $n > a$, on a

$$\sum_{k=a+1}^n f(k) = \int_a^n f(t) dt + \int_a^n \{t\} f'(t) dt,$$

où $\{t\}$ est la partie décimale de t , i.e. $\{t\} = t - E(t)$.

2 Montrer que si $\int_a^\infty |f'(t)| dt < \infty$, alors la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_a^\infty f(t) dt$.

B Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\cos(\text{Log} n)}{n}$, $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^{1+i\theta}}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

Exercice 2. formule d'Euler Mac-Laurin (Demailly p 85-88, Gourdon p 301)

1) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes (appelés polynômes de Bernoulli) vérifiant

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B'_n = nB_{n-1}, n \geq 1 \\ \int_0^1 B_n(x) dx = 0. \end{cases}$$

On a $B_1 = x - 1/2$. Montrer que pour $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$. On pose $b_n = B_n(0)$ (nombre de Bernoulli).

On pose $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$. Montrer que C_n vérifie les 3 conditions précédentes. En déduire que $b_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$.

On note $\tilde{B}_n(x)$ la fonction 1 périodique égale à B_n pour $x \in [0, 1[$.

2) Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, en faisant des intégrations par parties successives montrer que

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(x) dx &= \frac{f(k)}{2} + \frac{f(k+1)}{2} + \sum_{j=2}^r (-1)^{j-1} \frac{b_j}{j!} \left(f^{(j-1)}(k+1) - f^{(j-1)}(k) \right) \\ &\quad + (-1)^r \int_k^{k+1} f^{(r)}(x) \frac{\tilde{B}_r(x)}{r!} dx \end{aligned}$$

3) Soit $m \leq n$ 2 entiers. Montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n f(k) &= \int_m^n f(x) dx + \frac{f(m)}{2} + \frac{f(n)}{2} + \sum_{j=2}^r \frac{b_{2j}}{2j!} \left(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(m) \right) \\ &\quad + \int_m^n f^{(2r+1)}(x) \frac{\tilde{B}_{2r+1}(x)}{(2r+1)!} dx \end{aligned}$$

4) En déduire la valeur de la série $\sum_{k=1}^n k^3$.

5) En déduire un développement asymptotique de la série harmonique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 3. Le théorème central limite par la méthode de Lindeberg. Soit (X, X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de carré intégrable, centrée et réduite. Si $S_n = X_1 + \dots + X_n$, le théorème limite central nous apprend que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

La méthode de Lindeberg pour montrer ce résultat, consiste à remplacer $X_1, \dots, X_n$ par $Z_1, \dots, Z_n$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$, indépendantes de (X_n) . On va montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \mathbb{E}[f(Z)]$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, ce qui entraînera le théorème limite central. On pose $\Sigma_1 = Z_2 + \dots + Z_n$, $\Sigma_n = X_1 + \dots + X_{n-1}$ et, pour tout entier $1 < k < n$,

$$\Sigma_k = X_1 + \dots + X_{k-1} + Z_{k+1} + \dots + Z_n.$$

1) Montrer que $(\Sigma_1 + Z_1)/\sqrt{n}$ a même loi que Z .

2) En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] - \mathbb{E}[f(Z)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[f \left(\frac{\Sigma_k + X_k}{\sqrt{n}} \right) \right] - \mathbb{E} \left[f \left(\frac{\Sigma_k + Z_k}{\sqrt{n}} \right) \right].$$

3) On suppose maintenant et dans toute la suite que $\mathbb{E}[|X|^3] < \infty$. Montrer par la formule de Taylor-Lagrange et l'indépendance des suites (X_n) et (Z_n) que, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\left| \mathbb{E} \left[f \left(\frac{\Sigma_k + X_k}{\sqrt{n}} \right) \right] - \mathbb{E} \left[f \left(\frac{\Sigma_k + Z_k}{\sqrt{n}} \right) \right] \right| \leq \frac{M}{6n^{3/2}} \mathbb{E}[|X|^3 + |Z|^3]$$

avec

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(3)}(x)|.$$

4) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \mathbb{E}[f(Z)].$$

5) En passant par la convergence des fonctions de répartition, conclure que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Indication : Si $f \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$, on a pour tous $x, h \in \mathbb{R}$, la formule de Taylor-Lagrange

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + R_f(x)$$

avec

$$|R_f(x)| \leq \frac{M}{6} |h|^3.$$

Exercice 4. (intégraton numérique: méthode de Gauss).

On considère $]a, b[$ un intervalle (fini ou infini) de $\mathbb{R}$ et un poids w sur cet intervalle, c'est-à-dire une fonction continue $w > 0$ telle que $\int_a^b t^n w(t) dt < +\infty$ pour tout $n \geq 0$.

On considère une méthode d'intégration numérique approchée donnée sous la forme:

$$\int_a^b f(t)w(t)dt \simeq \sum_{i=1}^r \lambda_i f(x_i). \quad (1)$$

On dit que la méthode est d'ordre (supérieur) à n si (1) est une égalité pour tout f polynôme de degré inférieur ou égal à n .

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique choix de points x_i et de valeurs λ_i , $1 \leq i \leq r$ pour lequel la méthode est d'ordre $2r - 1$.

A) 1) Justifier qu'il existe une suite de polynômes orthogonaux associés au poids w .

2) Montrer que le polynôme orthogonal (unitaire) de degré n possède n racines distinctes dans $]a, b[$.

B) (Unicité de la méthode). On suppose, dans cette partie, que la méthode est d'ordre $2r - 1$.

1) On considère alors le polynôme π_r défini par

$$\pi_r(t) = \prod_{i=1}^r (t - x_i).$$

Montrer qu'alors, π_r est nécessairement le polynôme orthogonal unitaire de degré r associé au poids w et en déduire que les points x_i sont les racines de ce polynôme orthogonal de degré r .

2) Montrer qu'alors nécessairement, pour $1 \leq i \leq r$,

$$\lambda_i = \int_a^b L_i(t)w(t)dt \quad (2)$$

avec L_i le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_1, \dots, x_r$; c'est-à-dire le polynôme de degré $(\leq)r - 1$ vérifiant:

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j} \text{ pour tout } 1 \leq j \leq r.$$

C) (Existence de la méthode). On considère donc ici que les $x_i, 1 \leq i \leq r$ sont les racines du polynôme orthogonal (unitaire) de degré r associé à w et que les $\lambda_i, 1 \leq i \leq r$ sont donnés par (2).

1) Commencer par montrer que la méthode est d'ordre $\geq r - 1$, c'est-à-dire que (1) est une égalité pour tout f polynôme de degré inférieur ou égal à $r - 1$.

2) Montrer que la méthode est en fait d'ordre $2r - 1$, (on pourra utiliser la division euclidienne par π_r).