

Feuille 6: Un peu de séries et de transformée de Fourier

Exercice 1. (Théorie ponctuelle des séries de Fourier) On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour f et g 2 fonctions périodiques, on définit:

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

On note $e_n(t) = e^{int}$ et pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\bar{e}_n(t)dt.$$

On pose enfin

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f)e_n \text{ et } \sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f).$$

1) Montrer que

$$S_N(f) = f * D_N \text{ avec } D_N = \sum_{n=-N}^N e_n = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

et que

$$\sigma_N(f) = f * K_N \text{ avec } K_N = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2.$$

2) (Théorème de Féjer) Montrer que le noyau de Fejer K_N est une identité approchée.

a) En déduire que si $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($1 \leq p < +\infty$) alors $\sigma_N(f)$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{T})$.

b) Montrer également que si f est continue, alors $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f .

c) Montrer également que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet une limite à droite et à gauche en x_0 alors

$$\sigma_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-)).$$

3) (Théorème de Dirichlet) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet une limite à droite et à gauche en x_0 et si de plus la fonction

$$h \mapsto \frac{1}{h} [f(x_0 + h) - f(x_0^+) + f(x_0 - h) - f(x_0^-)]$$

est bornée au voisinage de 0, alors

$$S_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-)).$$

On pourra utiliser l'expression explicite du noyau de Dirichlet D_N ainsi que le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 2. Pour chaque $n \geq 0$, on considère l'application linéaire:

$$\phi_n : f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \rightarrow S_n(f)(0) \in \mathbb{C}$$

1) Montrer que ϕ_n est une forme linéaire continue et que sa norme est exactement :

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt$$

2) Montrer que $\|D_n\|_1 \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

On pourra montrer que:

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{n+\frac{1}{2}} \frac{|\sin(y)|}{y} dy.$$

3) En déduire (à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus) qu'il existe une fonction f_0 continue et 2π périodique pour laquelle:

$$\sup_{n \geq 0} |S_n(f_0)| = +\infty;$$

et qu'en particulier il existe une fonction continue et 2π périodique pour laquelle la série de Fourier diverge en 0.

Exercice 3. On appelle $L^2(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions mesurables 2π périodiques (enfin son espace quotient habituel) pour lesquelles:

$$\|f\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

1) Soit $h \in L^2(\mathbb{T})$. Montrer que l'application ϕ_h

$$\phi_h(f) = h * f$$

est une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même et donner sa norme.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de Fourier de h pour que ϕ_h soit injective.

3) Montrer que pour tout $h \in L^2(\mathbb{T})$, ϕ_h n'est jamais surjective.

Exercice 4. Inégalité de Bernstein (par les séries de Fourier).

Le but de l'exercice est de montrer le résultat:

Soit $\lambda > 0$. Alors pour tout $n \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ avec $\max_i |\lambda_i| \leq \lambda$ et tout $a_1, \dots, a_n$, la fonction:

$$h(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j t}$$

vérifie

$$\|h'\|_\infty \leq \lambda \|h\|_\infty.$$

A) On considère la fonction 2π périodique: définie par

$$\phi(t) = \begin{cases} t & \text{pour } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \text{pour } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

1) Quelle est la régularité de ϕ ? En déduire que la série de Fourier de ϕ converge normalement.

2) On note T la fonction 2π - périodique:

$$T(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + t & \text{pour } -\pi \leq t \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - t & \text{pour } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

On a donc $\phi(t) = T(t - \frac{\pi}{2})$.

Montrer les coefficients de Fourier de T sont tous positifs et en déduire que:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(T) = \frac{\pi}{2};$$

puis en déduire que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)| = \frac{\pi}{2}.$$

B) Montrer qu'il suffit de montrer l'inégalité de Bernstein pour $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

On pourra considérer: $\tilde{h}(t) = h(\alpha t)$ avec $\alpha = \frac{\pi}{2\lambda}$.

C) On considère donc maintenant $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que

$$h'(t) = \sum_{j=1}^n i\lambda_j a_j e^{i\lambda_j t} = \sum_{j=1}^n i\phi(\lambda_j) a_j e^{i\lambda_j t}$$

2) En déduire que

$$h'(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i c_n(\phi) h(t + n)$$

puis que

$$\|h'\|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)| \|h\|_\infty$$

et conclure.

3) Montrer que l'inégalité est optimale.

Transformée de Fourier

Ici, en général, on choisira la convention, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx \quad (1)$$

Exercice 5. Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne $\exp(-\alpha x^2)$.

Indication: On pourra dériver sous les signe intégral puis faire une intégration par parties.

Exercice 6. Calculer la transformée de Fourier de la double exponentielle: $f(x) = \exp(-\alpha|x|)$. En déduire celle de : $\frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 7. Calculer la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-a,a]}$. En déduire celle de la fonction triangle:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 8. Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ muni du produit de convolution est une algèbre qui ne possède pas d'unité.

Exercice 9. a) Montrer que l'équation $f * f = f$ n'admet pas de solution non nulles dans $L^1(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'équation $f * f = f$ admet une infinité de solutions dans L^2 (et qu'elles sont données par $f = \mathbf{1}_A$, avec A mesurable de mesure finie.)

Exercice 10. (Calcul direct de la transformée de Fourier du sinus cardinal.)

On considère la fonction sinus cardinal: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

1) Montrer que cette fonction n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ mais dans $L^2(\mathbb{R})$ (en fait dans tout les $L^p(\mathbb{R})$ pour $p > 1$).

2) On ne peut donc pas calculer directement sa transformée de Fourier par la formule (1). Justifier cependant que sa transformée de Fourier-Plancherel L^2 vérifie:

$$\mathcal{F}f(\xi) \stackrel{L^2}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{\sin(x)}{x} e^{-i\xi x} dx$$

On cherche donc à calculer: $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{\sin(x)}{x} e^{itx} dx$ pour tout t . Soit $A > 1$,

3) Montrer que

$$I_A(t) := \int_{-A}^A \frac{\sin(x)}{x} e^{itx} dx = \int_{\Gamma_A} \frac{\sin(z)}{z} e^{itz} dz.$$

avec Γ_A le chemin composé du segment allant de $-A$ à -1 , du demi-cercle unité inférieur allant de -1 à 1 et du segment allant de 1 à A .

4) Montrer que

$$I_A(t) = \phi_A(t+1) - \phi_A(t-1)$$

avec $\phi_A(s) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_A} \frac{e^{isz}}{z} dz$.

5) Montrer que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \phi_A(s) = \begin{cases} \pi & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

On pourra compléter Γ_A en un chemin fermé constitué d'un demi-cercle soit dans le demi-plan supérieur soit dans le demi-plan inférieur suivant le signe de s .

6) Montrer que $\phi_A(0)$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ pour tout $A > 1$. En particulier, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \phi_A(0) = \frac{\pi}{2}$.

7) Conclure que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I_A(t) = \begin{cases} \pi & \text{si } -1 < t < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } t = -1 \text{ ou } t = 1. \\ 0 & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$$

Exercice 11. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

1) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et que la transformation de Fourier préserve $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (et est donc un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui même.)

2) Montrer que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $f * g$ et fg appartiennent aussi à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 12. (Non surjectivité de la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).

0) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ impaire. Montrer que

$$\hat{f}(t) = -(2i) \int_{x=0}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi xt) dx.$$

2) On pose

$$\phi(x) = \int_{u=x}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

Montrer que $\phi \in \mathcal{C}_0([0, \infty))$.

3) Soit $R \geq 1$. Montrer (par Fubini (en utilisant que ϕ est bornée) et avec un changement de variable que

$$\int_{t=1}^R \frac{\hat{f}(t)}{t} dt = -(2i) \int_{u=0}^{+\infty} \left(\int_{t=2\pi x}^{2\pi x R} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) f(u) du.$$

En déduire avec le théorème de convergence dominée que

$$\int_{t=1}^R \frac{\hat{f}(t)}{t} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} -2i \int_0^\infty f(x) \phi(2\pi x) dx.$$

4) Montrer que si une fonction impaire g est la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors f est aussi impaire.

5) On pose

$$g(t) = \frac{\arctan t}{\ln(1+t^2)}.$$

Montrer que g est impaire, appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ mais n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 13. (Un théorème d'inversion ponctuelle).

1) Soit f une fonction intégrable sur $[0, T]$ admettant une limite (à droite) en 0 notée $f(0^+)$. Supposons qu'il existe K et x_0 tels que, pour tout $0 < x < x_0$, $|f(x) - f(0^+)| \leq Kx$. Alors

$$\int_0^T f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} f(0^+).$$

On rappelle ici que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

2) Soient f une fonction intégrable et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier (ici $\hat{f}(\xi) = \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$). Supposons que f admette en un point x une limite à gauche $f(x^-)$ et une limite à droite $f(x^+)$. Supposons de plus qu'il existe $\eta > 0$ et $M > 0$ tels que, pour $0 < h < \eta$,

$$|f(x+h) - f(x^+)| \leq Mh, |f(x-h) - f(x^-)| \leq Mh.$$

Alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{ixt} \hat{f}(t) dt = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)).$$