Leçons: Continuité et dérivabilité d'une fonctiond'une variable réelle. Exemples et C-ex. 228
Fonctions monotones, foctions convexes. Applications 229.

Exercice 1. Soit $p \geq 2$, montrer que l'existence d'un développement limité à l'ordre p en un point x_0 n'implique pas l'existence de la dérivée p-ème en x_0.

Exercice 2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$. Est ce que l'existence de la limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

implique que

$$f'(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty.$$

Qu'en est-il lorsque f est supposée de plus croissante?

Exercice 3. Montrer qu'une fonction *monotone* ne possède qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité.

Exercice 4. On dit qu'une fonction est *réglée* si elle est une limite uniforme de fonctions en escalier.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et x un point de discontinuité de f. Il est dit de *première espèce* si les limites à droite et à gauche $f(x^+)$ et $f(x^-)$ existent.

1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite à gauche et à droite en tout point.

On pose

$$\omega(f, x) = \max(|f(x) - f(x^+)|, |f(x) - f(x^-)|).$$

(f est donc continue en x si et seulement si $\omega(f, x) = 0$.)

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer par l'absurde que l'ensemble: $\{x \in [a, b], \omega(f, x) > \varepsilon\}$ est fini (Gourdon p36 ex 7).

En déduire qu'alors l'ensemble des points de discontinuités de f est dénombrable.

2) Montrer que f est réglée si et seulement si tous ses points de discontinuité sont de première espèce. (Gourdon p97)

En particulier, une fonction réglée ne possède qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité.

Exercice 5. *Intégrale de Cauchy et de Riemann.* (Boccara, Intégration p7)

Pour f une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et pour $n \geq 1$, $\sigma_n = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision de $[a, b]$, on définit

$$S(f, \sigma_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Montrer que si f est continue et si le pas de la suite de subdivisions σ_n tend vers 0, alors $S(f, \sigma_n)$ converge et sa limite ne dépend pas de la subdivision.

Justifier que si f est une fonction réglée, le résultat précédent subsiste.

Un peu plus généralement , on peut définir pour $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$,

$$S(f, \sigma_n, \xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Les résultats ci-dessus sont alors encore valables.

Intégrale de Riemann.

Pour f une fonction (bornée), $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et pour $n \geq 1$, $\sigma_n = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision de $[a, b]$, on définit

$$U(f, \sigma_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) (x_{k+1} - x_k)$$

et

$$L(f, \sigma_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) (x_{k+1} - x_k).$$

On a

$$L(f, \sigma_n) \leq S(f, \sigma_n, \xi) \leq U(f, \sigma_n).$$

On a donc encadré la fonction f par deux fonctions en escalier.

On dit que f est *intégrable au sens de Riemann* si pour toute suite de subdivision dont le pas tend vers 0,

$$\lim_{n \to +\infty} (U(f, \sigma_n) - L(f, \sigma_n)) = 0.$$

Soit f une fonction bornée. Montrer que f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est continue, sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Pour le sens direct, on introduira

$$E_n = \left\{x, w(f,x) \geq \frac{1}{n}\right\}, I_n = \{k, \mathbb{E}_n \cap [x_k, x_{k+1}] \neq \emptyset\}$$

avec $w(f,x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{y\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} f(y) - \inf_{y\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} f(y)\right)$ l'oscillation de f au point x et on montrera

$$\mu(E_n) \leq \sum_{k\in I_n} \frac{1}{n}(x_{k+1}-x_k) \leq \varepsilon$$

avec $\sigma_n = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $U(f,\sigma_n) - L(f,\sigma_n) \leq \varepsilon$.

Exercice 6. (*Théorème de Darboux*) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, montrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires:

a) preuve topologique (connexité et TAF) (Gourdon p 47)

b) preuve minimisation (compacité et minimisation)

Exercice 7. Montrer que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0 mais qu'elle vérifie le TVI.

Exercice 8. (**cordes**) (FGN1 p229) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([0,1]),\mathbb{R}), f(1) = f(0)\}$.

Pour $f \in E$, on note $A(f) = \{\sigma \geq 0, \exists x \in [0,1], f(x+\sigma) = f(x)\}$ l'ensemble des "longueurs des cordes".

1) On pose $h(x) = \sin(2\pi x)$. Montrer que $A(h) = [0,1/2] \cup \{1\}$.

2) Soit $f \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{1}{p} \in A(f)$. (On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x+\frac{1}{p}) - f(x)$ et montrer que nécessairement elle change de signe.)

3) Montrer que si pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq f(0) = f(1)$, $A(f) = [0,1]$.

En déduire que pour chaque $f \in E$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[0,\varepsilon] \in A(f)$.

4) Soit $\lambda \in (0,1]$ tel que $\frac{1}{\lambda} \notin \mathbb{N}^*$. On va ici construire une fonction $f \in E$ telle que $\lambda \notin A(f)$.

On note n la partie entière de $\frac{1}{\lambda}$. On a donc $n\lambda < 1 < n\lambda + \lambda$.

On construit d'abord f sur $[0,\lambda]$ comme étant n'importe quelle fonction continue telle que

$$f(0) = 0,\ f(1-n\lambda) = -1,\ f(\lambda) = \frac{1}{n}.$$

On prolonge alors f à $[0,1]$ en posant

$$f(x+\lambda) = f(x) + \frac{1}{n}.$$

Justifier que f est continue et que $f(1) = 0$ et que $\lambda \notin A(f)$.

5) En déduire que

$$\bigcap_{f \in E} A(f) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 9. Soit P un polynôme. Montrer que si P est scindé alors son polynôme dérivé est aussi scindé.

Exercice 10. (*e n'est pas algébrique d'ordre 2*). (Gourdon p103) Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas trois entiers non tous nuls tels que

$$ae^2 + be + c = 0.$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde. On considérer $f(x) = ae^x + ce^{-x}$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée entre les points 0 et 1 donne:

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta_n),$$

pour un certain $\theta_n \in (0,1)$. Or $f^{(k)}(0) = a + (-1)^k c \in \mathbb{Z}$. On montre donc facilement que $\frac{f^n(\theta_n)}{n} \in \mathbb{Z}$.

De plus on montre facilement que $|f^{(n)}(\theta_n)|$ est borné pour tout $n \geq 1$ (car $0 \leq \theta_n \leq 1$).

On en déduit que $f^{(n)}(\theta_n) = 0$ pour tout n suffisament grand. Puis que $a + c = 0$ et $a - c = 0$ en considérant les limites des sous-suites paires et impaires.

Exercice 11. *Inégalités de Kolmogorov* (Gourdon p83 ou FGN1 p274) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On note $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$.

On suppose que M_0 et M_2 sont finis. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. En écrivant la formule de Taylor Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$. Montrer que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

puis que

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Exercice 12. *fonction continue dérivable nulle part* (Gourdon p84). Soit Δ la fonction 1-périodique défine par $\Delta(x) = |x|$ pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On pose

$$f(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'est nulle part dérivabl

Exercice 13. (ZQ p258)

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est une intersection dénombrable d'ouverts (i.e. un G_δ).

On posera

$$\Omega_n := \left\{ x \in \Omega, \exists V_x \text{ voisinage de } x, \forall y, z \in V_x,\ |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}. \right\}$$

On montrera que f est continue en x si et seulement si $x \in \cap_{n \geq 1} \Omega_n$.

2) Application (avec Baire): Il n'existe pas de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3) La fonction de Weierstrass:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$. (Elle est donc réglée)

4) Les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \ g(x) = \begin{cases} q & \text{si } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

sont bien définies sur $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mais ne sont continues nulle part. (On montrera qu g n'est pas bornée sur aucun intervalle.)

Exercice 14. (ZQ p260)

1) Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction f. Alors f est continue sur un ensemble gras (i.e. contenant une réunion dénombrable d'ouverts dense).

La preuve utilise Baire.

2) En déduire qu'une dérivée est continue en tout point d'un ensemble gras. (Gourdon p400).

3) Construire une dérivée non continue sur $\mathbb{Q}$. (Hauchecorne).

Exercice 15. (Gourdon p 401 ou ZQ p263) (Avec Baire).

L'ensemble des fonctions nulle part dérivable sur $[a,b]$ contient une intersection dénombrable d'ouverts dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Remarque: une fois l'existence d'une fonction h nulle part dérivable prouvée, la densité dans l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ est claire.

Pour $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, il suffit de considérer: $f + \frac{1}{n}h$.

Exercice 16. *thm de Borel* (Rouvière p350 et 346 ou Gourdon p280 et 77)

1) Montrer que la fonction:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire l'existence d'une *"fonction plateau"* $\phi \geq 0$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2. \end{cases}$$

3) Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite quelconque de réels. Montrer qu'il existe une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall k \geq 0,\ u^{(k)}(0) = a_k.$$

On pourra considérer

$$u(x) = \sum_{k\geq 0} \phi(\lambda_k x) a_k \frac{x^k}{k!}$$

avec ϕ la fonction plateau précédente et où chaque λ_k sera convenablement choisi.

4) En déduire qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 17. (*fonctions à variation bornées*) (FGN1 p292, Gourdon p 114) Pour $\sigma = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision de $[a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on note

$$\mathrm{Var}_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

et

$$\mathbb{V}_a^b(f) = \sup_{\sigma \in \mathrm{sub}([a,b])} \mathrm{Var}_\sigma(f)$$

1) Montrer qu'une fonction est à variation bornée sur $[a,b]$ si et seulement si elle peut s'écrire comme la somme de 2 fonctions croissantes.

On pourra écrire $f(x) = \mathbb{V}_a^x(f) - (\mathbb{V}_a^x(f) - f(x))$.

2) Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, montrer que sa variation est donné par:

$$\mathbb{V}_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

3) Montrer que la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\cos(1/x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est continue mais n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$.

Exercice 18. *lemme des 3 pentes: dérivées à droite et à gauche en tout point $\mathring{I}$ d'une fonction convexe.*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \le b \le c$.

1) Montrer que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \le \frac{f(c) - f(b))}{c - b}.$$

2) En déduire que f possède une dérivée à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$.

3) En déduire que f est dérivable en dehors d'un ensemble au plus dénombrable.

Exercice 19. (FGN1 p285) Soit P une matrice bi-stochastique (les coefficients $P_{i,j}$ sont ≥ 0 et la somme de chaque ligne et de chaque colonne est égale à 1). Soit X un vecteur à coordonnées > 0. On pose $Y = PX$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^n y_i \ge \prod_{i=1}^n x_i.$$

On commencera par montrer que pour $1 \le i \le n$,

$$\ln y_i \ge \sum_j a_{i,j} \ln(x_j).$$

Exercice 20. Pour A une matrice symétrique dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_{\max}(A)$ la plus grande valeur propre de A. Montrer que $\lambda_{\max} : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est convexe.

Exercice 21. Soit f une fonction positive log-convexe. Montrer que f est convexe. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 22. *log-convexité de* Γ (Rudin Analyse réelle et complexe p94). Montrer que Γ est l'unique fonction log-convexe telle que pour tout $x > 0$

$$f(x+1) = xf(x) \text{ et } f(1) = 1.$$

Exercice 23. On admet ici le *théorème de Lebesgue*: "Une fonction monotone est dérivable presque partout".

1) En déduire que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est K-Lipschitzienne, alors f est dérivable presque partout. (On pourra écrire $f(x) = f(x) + Kx - Kx$.)

2) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est K-Lipschitzienne, alors si pour tout $a \leq b$,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(u)du.$$

On pourra calculer de deux manières (TCD et Chasles) la limite de la quantité:

$$\int_a^b n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) du.$$