Leçon: Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Exercice 1. (Objectif agrégation) (Théorème ergodique de Von Neumann)

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et T une contraction de H, c'est-à-dire un endomorphosme de H continu de norme $\|T\| \leq 1$. Notons T_n la moyenne de Césaro des $n = 1$ premiers itérés de T:

$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k.$$

L'objectif de cet exerice est de montrer la convergence ponctuelle:

$$\forall x \in H, \; T_n(x) \to_{n \to +\infty} p(x)$$

avec p le projecteur orthogonal sur Ker $(I - T)$.

a) Montrer que

$$x \in \text{Ker } (I - T) \Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle = \|x\|^2 \Leftrightarrow \langle x, Tx \rangle = \|x\|^2$$

b) En déduire que

$$\text{Ker } (I - T) = \text{Ker } (I - T)^*$$

Montrer que $T_n(x) = x = p(x)$ pour $x \in \text{Ker } (I - T)$.

c) Soit $x \in \text{Im } (I - T)$. Montrer que $T_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. *Indication:* On écrira: $x = (I - T)y$ et on montrera que

$$\|T_n(x)\| \leq \frac{2}{n+1} \|y\|.$$

d) Montrer que pour tout $x \in \overline{\text{Im } (I - T)}$, $T_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

e) Soit u un endomorphisme d'un espace de Hilbert continu, montrer que

$$H = \text{Ker } u^* \oplus^\perp \overline{\text{Im } u}.$$

On commencera par montrer que Ker $(u^*) = (\text{Im } u)^\perp$ et donc Ker $(u^*)^\perp = \overline{\text{Im } u}$.

f) En déduire que

$$H = \text{Ker } (I - T) \oplus^\perp \overline{\text{Im } (I - T)}$$

puis conclure.

g) Soit $H = L^2(\mathbb{T})$, muni de son produit saclaire canonique . Soit $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, montrer que pour tout $f \in H$,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(\cdot + k\alpha) \to_H \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$