Compléments probas.

Exercice 1. (**Théorème de Scheffé**)

Soit (X_n) et X une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités. On suppose que les variables aléatoires admettent des densités notées f_n et f.

Montrer que si f_n converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$, alors $X_n \lim X$ (en loi).

En notant F_n et F les fonctions de répartitions, avec le lemme de Fatou, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du = \int_{-\infty}^{t} \lim_n f_n(u)du \leq \liminf_n \int_{-\infty}^{t} f_n(u)du = \liminf_n F_n(t).$$

De même,

$$1-F(t) = \int_{t}^{+\infty} f(u)du = \int_{t}^{+\infty} \lim_n f_n(u)du \leq \liminf_n \int_{t}^{+\infty} f_n(u)du = 1-\limsup_n F_n(t).$$

D'où $\lim F_n(t) = F(t)$ et la convergence en loi.

Exercice 2. La réciproque est fausse. (Foata-Fuchs p216) Si X_n admet pour densité (justifier)

$$f_n(x) = (1 - \cos(2\pi n x))\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

alors X_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$ mais f_n ne converge pas simplement vers $\mathbf{1}_{[0,1]}$.

Pour vérifier la convergence en loi , il suffit de calculer la fonction de répartition de X_n:

$$F_{X_n}(t) = t - \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \to t \text{ si } 0 \leq t \leq 1.$$

Exercice 3. Théorème de Lévy et la fonction caractéristique caractérise la loi(Foata-Fuchs p 220 et 172)

Lemme 1. Soit Y une variable aléatoire réelle de densité g vérifiant la propriété suivante: g est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, i.e.,

$$g(t) = \int_{x\in\mathbb{R}} e^{itx} k(x)dx$$

avec k intégrable.

Soit X une variable aléatoire réelle indépendante de Y. On note $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ sa fonction caractéristique. Alors $(X+Y)$ est à densité et

$$f_{(X+Y)}(u) = \int_{x\in\mathbb{R}} e^{iux}k(x)\phi_X(-x)dx.$$

La preuve se fait par Fubini:

$$\begin{aligned} f_{(X+Y)}(u) = \int_{v\in\mathbb{R}} g(u-v)d\mathbb{P}_X(v) &= \int_v \int_x e^{i(u-v)x}k(x)dxd\mathbb{P}_X(v) \\ = \int_x e^{iux}k(x)\left(\int_v e^{-ivx}d\mathbb{P}_X(v)\right)dx &= \int_{x\in\mathbb{R}} e^{iux}k(x)\phi_X(-x)dx. \end{aligned}$$

Remarque: pour tout $a > 0$, la loi normale $N(0,a)$ vérifie la condition du lemme 1.

Lemme 2. Soit (X_n) et X une suite de variables aléatoires, on suppose que l'on a la convergence simple

$$\Phi_{X_n}(t) \to \Phi_X(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Soit Y une variable aléatoire "ancipitale" indépendante. On a la convergence en loi

$$X_n + Y \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y.$$

La preuve se fait par convergence dominée avec le théorème de Scheffé.
La densité de $X_n + Y$ est:

$$\begin{aligned} f_{(X_n+Y)}(u) &= \int_{x\in\mathbb{R}} e^{iux}k(x)\phi_{X_n}(-x)dx \\ &\to \int_{x\in\mathbb{R}} e^{iux}k(x)\phi_X(-x)dx = f_{(X+Y)}(u). \end{aligned}$$

Remarque: le lemme 2 n'est pas parfaitement écrit car les X_n ne sont pas nécessairement définies sur le même espace de probabilité.

Théorème de Lévy. Si

$$\Phi_{X_n}(t) \to \Phi_X(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Quitte à grossir l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ initial, On considère Y de loi $\mathcal{N}(0, \varepsilon)$ indépendante de X_n. (On remarque que $E[|Y|] \leq \varepsilon$.) Pour montrer la convergence en loi, on va utiliser le critère de la "fonction muette" pour la classe des fonctions Lipschitziennes bornées. On va montrer que pour toute fonction Lipschitzienne bornée h,

$$\mathbb{E}[h(X_n)] \to \mathbb{E}[h(X)].$$

(Montrer que ça suffit pour avoir la convergence en loi voulue).

On écrit:

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)]| &\leq |\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X_n + Y)]| + |\mathbb{E}[h(X_n + Y)] - \mathbb{E}[h(X + Y)]| \\ &\quad + |\mathbb{E}[h(X + Y)] - \mathbb{E}[h(X)]| \\ &\leq 2K\mathbb{E}[|Y|] + |\mathbb{E}[h(X_n + Y)] - \mathbb{E}[h(X + Y)]|,\end{aligned}$$

avec K la constante de Lipshitz de h. Le premier terme est $\leq 2K\varepsilon$ et le dernier tend vers 0 d'après le lemme 2. D'où le résultat.

Conséquence: La fonction caractéristique caractérise la loi.

Si $\phi_X = \phi_Y$, alors en prenant X_n de loi constante (à celle de X), on a X_n qui converge en loi vers X et vers Y. Par unicité de la limite, les lois de X et de Y sont les mêmes.