Leçons:
Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire. 260.
Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications. 261.
Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications. 263

ESPERANCE, VARIANCE ET MOMENTS

Exercice 1. loi géométrique.

La loi géométrique correspond à l'instant du premier succès dans une suite d'épreuves indépendantes de Bernoulli dont la probabilité de succès est p, $0 \leq p \leq 1$.

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On a donc pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$.

1) Montrer que X vérifie la propriété d'absence de mémoire:

$$\mathbb{P}(X > n + k|X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

2) Soient ε et Y deux variables aléatoires indépendantes avec ε de loi de Bernoulli $B(p)$ et Y de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Montrer l'égalité en loi

$$X = \varepsilon + (1 - \varepsilon)(1 + Y).$$

En déduire, via un calcul simple, l'espérance et la variance de X.

3) En déduire également que la fonction génératrice de X vaut:

$$G_X(s) := \mathbb{E}[s^X] = \frac{sp}{1 - sq}.$$

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire positive, montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt.$$

Exercice 3. 1) Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Soit $a > 0$, montrer que

$$\mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{X \geq \sqrt{n}a}] \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On suppose que la loi commune possède un moment d'ordre 2 fini. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$M_n = \max_{1\leq k\leq n} |X_k|.$$

Montrer que $(M_n/\sqrt{n})$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 4. thm des moments et c-ex (Barbe-Ledoux p 73). Soit X une variable aléatoire bornée. Jusitifier que X admet des moments de tout ordre. En écrivant $e^{itX} = \sum_{k\geq 0} i^k t^k X^k$, et en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\Phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k\geq 0} i^k t^k \mathbb{E}[X^k].$$

En déduire que si X et Y sont bornées et ont les mêmes moments, elles ont les mêmes lois.

Le résultat n'est plus vrai si les variables aléatoires ne sont pas bornées. Contre-exemple:

Soit X une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Montrer que $Z = e^X$ a pour densité $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z}e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}}\mathbf{I}_{]0,+\infty[}(z)$.
2) Pour $a \in [-1,1]$ justifier que la fonction f_a définie par $f_a(x) = f(x)\,(1 + a\sin(2\pi \ln x))$ est une densité de probabilité.
3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{ku}e^{-u^2/2}\sin(2\pi u)\,du = 0$.
4) En déduire que si Z_a est une variable aléatoire de densité f_a, alors Z_a et Z ont mêmes moments et que les moments ne caractérisent pas la loi.

Exercice 5. Pistes supplémentaires: équivalence entre la fct caractéristique est dérivable $2n$ fois en 0 et l'existence d'un moment d'ordre $2n$ (Barbe-Ledoux p 69, attention à quelques petites fautes de frappe), polynômes de Bernstein, inégalités de Knhintchine (ZQ p 238), ...

FONCTIONS CARACTERISTIQUES

Exercice 6. Fonctions caractéristiques de lois discrètes. Déterminer la fonction caractéristique Φ_X de la variable aléatoire discrète X dans les cas suivants.

1) $X = a$ presque sûrement.

2) X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

3) X suit la loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ avec $p = 1/2$.

4) X suit la loi Uniforme discrète sur $\{1, \dots, n\}$ avec $n \geq 1$.

5) X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Retrouver l'espérance et la variance de X.

Exercice 7. Montrer que si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction carctéristique est 2π-périodique.

Exercice 8. Fonctions caractéristiques de lois continues. Déterminer la fonction caractéristique Φ_X de la variable aléatoire continue X dans les cas suivants.

1) X suit la loi Uniforme sur $[-a, a]$.

2) X suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

3) X suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$ avec $c > 0$. On pourra utiliser le résultat précédent et la transformation de Fourier inverse.

4) X suit la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pourra dériver la fonction caractéristique et montrer qu'elle vérifie une certaine équation différentielle.

5) X suit la loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Retrouver l'espérance et la variance de X.

En déduire que la somme de 2 variables aléatoires indépendantes de lois de Cauchy est ecore de loi de Cauchy. et que la somme de 2 variables aléatoires indépendantes de lois normales est ecore de loi normale.

Exercice 9. (**Lemme de Riemann-Lebesgue**). Soit X une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction caractéristique de X tend vers 0 à l'infini. (On pourra commencer par le cas où la densité de X est de classe $\mathcal{C}^1$).

Exercice 10. Fonction génératrice. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la série génératrice de comme la fonction de la variable réelle:

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k \geq 0} s^k \mathbb{P}(X = k).$$

C'est une série entière de rayon de convergence ≥ 1. (pourquoi?) Elle carcatérise la loi de X, car pour $k \geq 0, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0)$.

1) Montrer que si X et Y sont indépendantes et de loi de Poisson, $X+Y$ suit encore une loi de Poisson.

2) Montrer que si X admet un moment d'ordre 1, alors G_X est dérivable en 1 (à gauche) et $G'_X(1) = \mathbb{E}[X]$.

3) Montrer que si X admet un moment d'ordre 2, alors G_X est 2 fois dérivable en 1 (à gauche) et $G''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)]$.

4) (Somme aléatoire)

Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit Y une variable aléatoire discrète à support dans $\mathbb{N}$, indépendante de (Z_n). On pose

$$X = \sum_{k=1}^{Y} Z_k$$

avec la convention que X prend la valeur 0 lorsque Y prend la valeur 0.

Montrer que

$$G_X(s) = G_Y \circ G_Z(s).$$

Donner la loi de x dans le cas où Z_n est de loi de Bernoulli $Ber(p)$ $(0 < p < 1)$ et Y de loi $\mathcal{B}(n, \pi)$ ou de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Pour aller plus loin sur les sommes aléatoires: (Galton-Watson, cotrell-CGDM p72).

Exercice 11. **Limite de fonctions caractéristiques.** Le but de cet exercice est de montrer qu'une limite simple de fonctions caractéristiques n'est pas forcément une fonction caractéristique.

1) Une fonction caractéristique est-elle nécessairement continue ? Le prouver.

2) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, n]$. On note Φ_n la fonction caractéristique de X_n. Calculer Φ_n et montrer que Φ_n converge simplement vers une limite Φ à déterminer.

3) Vérifier que Φ n'est pas une fonction continue et conclure.

Exercice 12. Pistes supplémentaires: Galton-Watson, transformée de Laplace et grande déviations, Lois indéfinient divisibles, Vecteurs Gaussiens ...

CONVERGENCES

Exercice 13. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles. Montrer que, si

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \qquad \text{alors} \qquad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Montrer que la réciproque est fausse sauf si $X = a$ p.s. avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. 1) Soit (X_n) et X une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Longleftrightarrow \text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

2) **Approximation binomiale-Poisson**. Soit X_n de loi Binomiale $Bin(n, p_n)$, $n \geq 1, 0 \leq p \leq 1$. On suppose que $np_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$. Montrer alors que X_n converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 15. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2) = p_n$. Etudier la convergence de la suite (X_n) dans $\mathbb{L}^1$, en probabilité et presque sûrement si $p_n = 1/n$ puis $p_n = 1/n^2$.

Pour la convergence presuque sûre, on utilise le lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 16. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(1/n)$ et soit $Y_n = X_n - [X_n]$ où $[X_n]$ désigne la partie entière de X_n. Montrer que Y_n converge en loi vers une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 17. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur un intervalle $[0, \theta]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$$

a) Pourquoi la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle sûrement vers une variable aléatoire T ?

b) Déterminer la loi de T_n.

c) En déduire que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers θ.

d) *(Estimation de θ avec une précision relative de 10^{-3} et un niveau de confiance de 0.95.)* Pour quelles valeurs de n a-t-on $0 \leq (\theta - T_n)/\theta < 10^{-3}$ avec une probabilité supérieure à 0.95 ?

e) Montrer que la suite $(\, n(\theta - T_n)\,)_{n\geq 1}$ converge en loi. Quelle est la loi limite de cette suite ?

Exercice 18. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que chaque X_n suit une loi normale et que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que X suit aussi une loi normale.

Exercice 19. 1) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$e^{\frac{-x^2}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \leq \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \leq e^{\frac{-x^2}{2}} \frac{1}{x}.$$

2) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \left\{ \frac{X_n}{\sqrt{2 \ln n}} \geq 1 - \varepsilon \right\}$$

Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$B_n = \left\{ \frac{X_n}{\sqrt{2 \ln n}} \geq 1 + \varepsilon \right\}$$

Montrer que $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 0$.

4) En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \limsup \left(\frac{X_n}{\sqrt{2 \ln n}} \right) = 1 \right\} \right) = 1.$$

THEOREMES LIMIITES: LFGN ET TCL

Exercice 20. (Barbe-Ledoux p140) (loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que x. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que si la fonction caractéristique ϕ_X de X est dérivable en 0 alors

$\frac{S_n}{n}$ converge en loi (et en probabilité) vers la constante $\phi'_X(0)$.

Que vaut cette constante si X est intégrable?

Exercice 21. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$ avec $c > 0$. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On a donc que S_n est de loi de Cauchy $\mathcal{C}(cn)$ et donc que $\frac{S_n}{n}$ est encore de loi $\mathcal{C}(c)$. En déduire que $\frac{S_n}{n}$ converge en loi mais que $\frac{S_n}{n}$ ne converge pas en probabilité vers 0. (En particulier la loi de Cauchy ne vérifie pas la LFGN).

On rappelle que la loi de Cauchy n'est pas intégrable, elle n'admet pas d'espérance. La médiane de la loi de Cauchy est 0. (Rq: contrairement au résultat précédent, $\frac{S_n}{n}$ ne converge pas en loi vers une constante.)

Exercice 22. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Déterminer la loi de S_n (réponse: $\mathcal{P}(n\lambda)$).

2) Montrer que (LFGN)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lambda \qquad \text{p.s.}$$

3) Montrer également que (TCL)

$$\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

4) En déduire, sans calcul, que

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-n\lambda) \sum_{k=0}^{[n\lambda]} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

On remarquera que $\exp(-n\lambda)\sum_{k=0}^{[n\lambda]} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \mathbb{P}(Y \leq n\lambda)$ pour Y de loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

Exercice 23. *Loi forte des grands nombres L^4.* (Cotrell-DGM)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $E[X_1^4] < \infty$ et que les variables sont centrées ($E[X_1] = 0$). On pose $S_n = X_1 + \dots X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que $\frac{S_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n^4]$ en fonction des moments d'ordre 2 et 4 des X_i.

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E[S_n^4]}{\varepsilon^4 n^4}.$$

3. Utiliser le lemme de Borell-Cantelli et conclure.

4. Montrer que le résultat reste vrai même si les variables aléatoires X_i ne sont plus de même loi mais vérifient la condition $\sup_n E[X_n^4] \leq M < \infty$.

Exercice 24. *Loi forte des grands nombres version avec existence de la transformée de Laplace.* On suppose que $\mathbb{E}[e^{t|X|}]$ est fini pour tout $t \geq 0$. Le but est de montrer que S_n/n converge presque sûrement vers m. Pour simplifier, on suppose également que $m = E[X] = 0$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\varepsilon nt}\mathbb{E}[e^{tX}]^n.$$

b) On pose $\alpha = \inf_{t\geq 0} e^{-\varepsilon t}\mathbb{E}[e^{tX}]$, montrer que $\alpha < 1$ (on pourra dériver en $t = 0$) et que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \alpha^n.$$

c) En déduire que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) < +\infty$. Justifier que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) < +\infty$.

d) Conclure.

Problème I
Distance en variation totale

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de lois de probabilité respectives P_X et P_Y. On appelle distance en variation totale entre P_X et P_Y la quantité

$$\| P_X - P_Y \|_{TV} = \sup_{A\in\mathcal{A}} \big|P_X(A) - P_Y(A)\big|.$$

Il est important de préciser que X et Y ne sont pas nécessairement indépendantes.

1) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A \text{ et } X = Y) + \mathbb{P}(X \in A \text{ et } X \neq Y).$$

2) En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\big|P_X(A) - P_Y(A)\big| = \big|\mathbb{P}(X \in A \text{ et } X \neq Y) - \mathbb{P}(Y \in A \text{ et } X \neq Y)\big|,$$

3) Conclure que

$$\| P_X - P_Y \|_{TV} \leq \mathbb{P}(X \neq Y).$$

4) On se place dans le cas particulier où X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\lambda)$ avec $0 < \lambda < 1$. On suppose également que

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) &= 1 - \lambda, \\ \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) &= \exp(-\lambda) - (1 - \lambda). \end{cases}$$

De plus, pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = 0) = 0$ et

$$\mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = 1) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Pour ce couplage particulier, montrer que

$$\| P_X - P_Y \|_{TV} \leq \lambda(1 - \exp(-\lambda)) \leq \lambda^2.$$

5) Finalement, soit $X = X_1 + \cdots + X_n$ où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(p)$ avec $0 < p < 1$, donc X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$. Soit $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$ où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, donc Y suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer, via le 4), que

$$\| P_X - P_Y \|_{TV} \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Problème II
Sur la méthode de Lindeberg

Soit (X, X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de carré intégrable, centrée et réduite. Si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, le théorème limite central nous apprend que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

La méthode de Lindeberg pour montrer ce résultat, consiste à remplacer $X_1, \ldots, X_n$ par $Z_1, \ldots, Z_n$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, indépendantes de (X_n). On va montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big] = \mathbb{E}\big[f(Z)\big]$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, ce qui entraînera le théorème limite central. On pose $\Sigma_1 = Z_2 + \cdots + Z_n$, $\Sigma_n = X_1 + \cdots + X_{n-1}$ et, pour tout entier $1 < k < n$,

$$\Sigma_k = X_1 + \cdots + X_{k-1} + Z_{k+1} + \cdots + Z_n.$$

1) Montrer que $(\Sigma_1 + Z_1)/\sqrt{n}$ a même loi que Z.

2) En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big] - \mathbb{E}\big[f(Z)\big] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{\Sigma_k + X_k}{\sqrt{n}}\Big)\Big] - \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{\Sigma_k + Z_k}{\sqrt{n}}\Big)\Big].$$

3) On suppose maintenant et dans toute la suite que $\mathbb{E}\big[|X|^3\big] < \infty$. Montrer par la formule de Taylor-Lagrange et l'indépendance des suites (X_n) et (Z_n) que, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\Big|\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{\Sigma_k + X_k}{\sqrt{n}}\Big)\Big] - \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{\Sigma_k + Z_k}{\sqrt{n}}\Big)\Big]\Big| \leq \frac{M}{6n^{3/2}}\mathbb{E}\big[|X|^3 + |Z|^3\big]$$

avec

$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|f^{(3)}(x)\big|.$$

4) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big] = \mathbb{E}\big[f(Z)\big].$$

5) En passant par la convergence des fonctions de répartition, conclure que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Indication : Si $f \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$, on a pour tous $x, h \in \mathbb{R}$, la formule de Taylor-Lagrange

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + R_f(x)$$

avec

$$|R_f(x)| \leq \frac{M}{6} |h|^3.$$

Exercice 25. : Pistes supplémentaires:

LFGN version L^4 (Cotrell), version L^2, version L^1 (Barbe-Ledoux, dur), version avec transformée de Laplace.

TCL par développement limité, version Essen (Barbe-ledoux p149).

Théorème de Lévy (Foata-Fuchs p220)

Théorèmes de Skorohod, si $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$, il existe un espace probabilisé sur le lequel X_n converge p.s. vers X avec X_n de loi μ_n et X de loi μ.