Lois usuelles discrètes

- *Loi de Bernoulli* de paramètre p, $0 \leq p \leq 1$.
  A valeurs dans $\{0, 1\}$.
  $\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
  $\mathbb{E}[X] = p$, $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$.

- *Loi Binomiale* de paramètres $n \geq 1$ et p, $0 \leq p \leq 1$.
  A valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$.
  $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$.
  $\mathbb{E}[X] = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$.

  La loi binomiale compte le nombre de succès de n expériences indépendantes de Bernoulli de même paramètre p: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_1, \ldots X_n$ indépendantes de loi de Bernoulli de même paramètre p.

- *Loi Géométrique* de paramètre p, $0 \leq p \leq 1$.
  A valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3 \ldots\}$.
  $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$, $k \geq 1$.
  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$. Elle modélise le premier instant de succès pour une suite d'expériences indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.

  Elle vérifie la propriété d'absence de mémoire: $\mathbb{P}(X > n + k | X > k) = \mathbb{P}(X > n)$, $k, n \geq 0$.

- *Loi de Poisson* de paramètre λ, $\lambda > 0$.
  A valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$.
  $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \geq 0$.
  $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

  La somme de variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres λ et μ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Lois usuelles continues

- *Loi uniforme* sur $[a, b]$.
  A valeurs dans $[a, b]$.
  densité: $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$.
  $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

- *Loi exponentielle* de paramètre $\lambda > 0$.
  A valeurs dans $[0, \infty[$.
  densité: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$.
  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

  Elle vérifie la propriété d'absence de mémoire: $\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \mathbb{P}(X > s)$, $t, s > 0$.

Le minimum de 2 lois exponentielles indépendantes de paramètres λ et μ est encore une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

La loi exponentielle de paramètre λ est en fait une loi $\Gamma(1, \lambda)$.

La somme de n lois exponentielles indépendantes de meme paramètre λ est une loi Gamma de paramètres $\Gamma(n, \lambda)$.

- *Loi Gamma* de paramètres $\lambda > 0$ et $k > 0$.
  A valeurs dans $[0, \infty[$.
  densité: $f(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x} x^{k-1} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$
  $\mathbb{E}[X] = \frac{k}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{k}{\lambda^2}$.

- *Loi de Laplace (ou double exponentielle)* de paramètre $\lambda > 0$.
  A valeurs dans $\mathbb{R}$.
  densité: $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$.
  $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

  Fonction caractéristique : $\frac{\lambda^2}{x^2 + \lambda^2}$ (voir loi de Cauchy).

- *Loi de Cauchy* de paramètre $c > 0$.
  A valeurs dans $\mathbb{R}$.
  densité: $f(x) = \frac{c}{x^2 + c^2}$.

  La somme de 2 lois de Cauchy est encore une loi de Cauchy. le paramètre est la somme des paramètres.

  Si X, Y $\mathcal{N}(0,1)$, indépendantes, $\frac{X}{Y}$ est de loi $\mathcal{C}(1)$.

  Fonction caractéristique : $e^{-c|t|}$ (voir loi de Laplace).

- *Loi gaussienne* de paramètres $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.
  A valeurs dans $\mathbb{R}$.
  densité: $f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
  $\mathbb{E}[X] = m$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

  Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $(aX + b)$ suit la loi $\mathcal{N}(b, a^2)$.

  Si X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

  Si $X \sim \mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$ et si X et Y sont indépendantes alors $X + Y$ suit encore une loi normale $\mathcal{N}(m_X + m_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

  Fonction caractéristique $\mathcal{N}(0,1)$: $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

  Fonction caractéristique $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $e^{imt} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.