Oral d'analyse et probabilités
Suites

Exercice 1.

1) Soit (u_n) une suite de réels (ou une suite dans un espace métrique). L'ensemble des valeurs d'adhérences est défini par

$$Adh(u_n) := \bigcap_{n\geq 1} \overline{\{u_k;\ k \geq n\}}.$$

Montrer que $\ell \in Adh(u_n)$ si et seulement si il existe une sous suite (n_k) telle que $\ell = \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}$.

2) Lorsque (u_n) est une suite de réels, on pose $\limsup u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{u_p;\ p \geq n\}$. Montrer que $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n), et que $\lim u_n$ existe et vaut 0 si et seulement si $\limsup |u_n| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 2. (Rouvière exo 35)

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels défini par $u_n = f(n)$ pour $n \geq 1$ avec f une fonction croissante telle que $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

Montrer que la suite u_n est dense sur le cercle.

(Pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et k un entier ($k \geq f(1)$), on pourra considérer x_k le réel tel que $f(x_k) = \theta + 2k\pi$ et n_k sa partie entière.)

2) On considère les cas $u_n = \cos(a\sqrt{n})$, $u_n = \cos(a \ln n)$, $u_n = \cos(an)$, $a \in \mathbb{R}$. Dans quels cas a-t-on $Adh(u_n) = [-1, 1]$?

Exercice 3. (Dantzer)

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$ (ℓ est appelé point fixe de f). On dit que ℓ est répulsif si $|f'(\ell)| > 1$. Soit (u_n) une suite avec u_0 donné et vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Montrer que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si il existe n_0 tel que $u_{n_0} = \ell$.

b) On suppose que $f(x) = 2x^2 - 1$. Vérifier que $f([-1, 1]) = [-1, 1]$, que f a exactement deux points fixes et qu'ils sont tous les deux répulsifs. On note $C = \{u_0 \in [-1, 1];\ (u_n) \text{ converge}\}$ et $C_n = \{u_0 \in [-1, 1];\ u_n \in \{-1/2, 1\}\}$. Montrer que $C = \bigcup\limits_{n\geq 0} C_n$. Montrer que les ensembles C_n sont finis, en déduire que C est dénombrable, puis que $D = [-1, 1] \backslash C = \{u_0;\ (u_n) \text{ diverge}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

On pose $u_0 = \cos(a)$, avec $a \in [0, \pi]$. Montrer que $u_n = \cos(2^n a)$. Montrer que $u_n = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = \frac{k}{2^{n-1}}$. $C \supset \bigcup_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq 0} \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) \right\}$, puis que C est dense. dans $[-1, 1]$.

Exercice 4. Iteration du sinus (Rouvière)

On considère que (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : [0, 1] \to [0, 1]$.

On suppose que $u_n \to 0$ et que $f(x) = x - ax^\beta + o(x^\beta)$ au voisinage de 0 et que $a > 0, \beta > 1$.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$, donner un équivalent de v_n.

2) Donner l'unique valeur de α pour laquelle v_n converge vers une limite non triviale. En déduire que

$$u_n \sim (a(\beta - 1)n)^{\frac{1}{1-\beta}} .$$

3) Soit $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour $n \geq 0$, justifier que $u_n \to 0$ et que

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

4) Soit $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Montrer que $u_n \to +\infty$ et que

$$u_n \sim \sqrt{n}.$$

Exercice 5. Approximation d'une "intégrale d'Euler" pour x petit à l'aide de séries divergentes (Walter Appel, Mathématiques pour la physique).

On note pour $x > 0$.

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt.$$

1) Justifier que f est bien définie et que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

2) Montrer que

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

3) En déduire que,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, k! \, x^{k+1} + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt.$$

4) On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, k! \, x^{k+1}$. Montrer que $|f(x) - S_{n-1}(x)| \leq n! x^{n+1}$.

5) On pose $e_n(x) = k! \, x^{k+1}$. On pose $N = \left[\frac{1}{x}\right]$.

On suppose maintenant que $0 < x < 1$. Etudier la suite $e_n(x)$ et montrer qu'elle atteint son minimum pour $n = N$ et qu'il vaut $\frac{N!}{N^N + 1}$.

6) Donner la valeur de la meilleure approximation que l'on peut trouver par cette méthode de $f\left(\frac{1}{20}\right)$, $f\left(\frac{1}{50}\right)$. Donner un équivalent de la meilleure approximation obtenue par cette méthode de $f\left(\frac{1}{N}\right)$. (On rappelle la formule de Stirling $N! \simeq \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$.)

Exercice 6. Accélération de convergence: Delta de Aitken (Dantzer).

1) Soit (x_n) une suite convergeant vers l. On suppose que

$$\frac{x_{n+1} - l}{x_n - l} \to k \text{ avec } k \in (0,1).$$

2) On pose $y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1}}$.
Montrer que

$$\frac{y_n - l}{x_n - l} \longrightarrow_{n \to +\infty} 0.$$

3) On considère que (x_n) est définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que l'hypothèse est vérifiée lorsque x_n converge vers un point fixe attractif ($0 < |f'(l)| < 1$). Proposer dans ce cadre des exemples où l'hypothèse n'est pas vérifiée.

Exercice 7. Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires (Ciarlet, Dunod).

Soit $b \in \mathbb{C}^n$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. On veut résoudre l'équation $Au = b$. Supposons que $A = M - N$, avec M inversible. On a alors

$$Au = b \iff Mu = Nu + b \iff u = M^{-1}Nu + M^{-1}b$$

On définit la suite recurrente (u_k) par $u_0 \in \mathbb{C}^n$ et $Mu_{k+1} = Nu_k + b$. Si $Au = b$, on a alors $Mu = Nu + b$ et donc $Me_{k+1} = Ne_k$, où $e_k = u_k - u$ désigne l'erreur. On dit que la méthode converge si $\|e_k\| \to 0$. Si $\|\cdot\|$ est la nome matricielle associée à une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$, on a $\|e_{k+1}\| \leq \|M^{-1}N\| \|e_k\|$ pour tout k, et donc $\|e_k\| \leq \|M^{-1}N\|^k \|e_0\|$. Si $\|M^{-1}N\| < 1$, la méthode est alors convergente.

Méthode de Jacobi.

On définit $m_{ij} = a_{ij}$ si $i = j$ et $m_{ij} = 0$ sinon. La matrice $M = (m_{ij})$ est diagonale et on pose $N = M - A$.

Théorème. *Si pour tout i, on a $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, alors la méthode de Jacobi converge.*

Prenons pour norme sur $\mathbb{C}^n$ la norme sup. On a alors $\|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Comme $M^{-1} = diag(a_{11}^{-1}, \cdots, a_{nn}^{-1})$, le coefficient d'indices i, j de $M^{-1}N$ est $\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ si $j \neq i$ et 0 sinon. Par conséquent, $\|M^{-1}N\| = \sup_i \dfrac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 1$ et la méthode de Jacobi converge.

Méthode de Gauss-Seidel. On définit $m_{ij} = a_{ij}$ si $i \geq j$ et $m_{ij} = 0$ sinon. La matrice $M = (m_{ij})$ est triangulaire inférieure et on pose $N = M - A$.

Théorème. *Si A est une matrice hermitienne définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge.*

Comme A est une matrice hermitienne définie positive, A est inversible, et, si $v \in \mathbb{C}^n$, $\|v\| = (v^*Av)^{1/2}$ définit bien une norme sur $\mathbb{C}^n$. Notons que $a_{ii} = e_iAe_i > 0$ et la matrice M est aussi inversible. On note $D = diag(a_{11}, \cdots, a_{nn})$. On a

$$\|M^{-1}N\| = \|I - M^{-1}A\| = \sup\{\|v - M^{-1}Av\|;\ \|v\| = 1\}$$

Posons $w = M^{-1}Av$, on a donc $v = A^{-1}Mw$, $v^* = w^*M^*A^{-1}$ et

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= 1 - v^*Aw - w^*Av + w^*Aw = 1 - w^*M^*w - w^*Mw + w^*Aw \\ &= 1 - w^*(M^* + M - A)w = 1 - w^*Dw < 1 \end{aligned}$$

Comme $f : v \to \|v - M^{-1}Av\|$ atteint son sup sur le compact $K = \{v \in \mathbb{C}^n;\ \|v\| = 1\}$ en un point v_0, on en déduit que $\|M^{-1}N\| = \sup\{f(v);\ v \in K\} = f(v_0) < 1$ et la méthode de Gauss-Seidel converge.

Exercice 8. 3-cycles, n-cycles (Chambert-Loir, Fermigier, Maillot). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non) et $f : I \to I$ une application. Pour tout $u_0 \in I$, la suite définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ est bien définie. On note $f^{(0)} = Id$, $f^{(1)} = f$, $f^{(2)} = f \circ f$, etc.

Définition : $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \subset I^n$ est un n-cycle si $x_0, x_1, \cdots x_{n-1}$ sont deux à deux distincts, si pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $x_k = f^{(k)}(x_0)$ et si $f^{(n)}(x_0) = x_0$. On dit alors que x_0 est de période (exactement) n.

Lemme 1 : *Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$ est une application continue telle que $f(J) \supset [\alpha, \beta]$, alors il existe un intervalle compact $J' \subset J$ tel que $f(J') = [\alpha, \beta]$.*

Lemme 2 : *Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ est une application continue telle que $f([\alpha, \beta]) \supset [\alpha, \beta]$, alors il existe $x_0 \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(x_0) = x_0$.*

Théorème : *Si $f : I \to I$ est continue et possède un 3-cycle, alors pour tout $n \geq 1$, f possède un n-cycle.*

Démonstration du théorème : Par hypothèse, il existe 3 points distincts a, b, c de I tels que $f(a) = b$, $f(b) = c$ et $f(c) = a$. Sans perdre de généralité on peut supposer que $a < b < c$. Notons $K = [a, b]$ et $L = [b, c]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on a $f(K) \supset [f(a), f(b)] = L$ et $f(L) \supset [a, c] = K \cup L$. Montrons l'existence d'un n-cycle.

n = 1. Comme $f(L) \supset L$, d'après le lemme 2, il existe $x_0 \in L$ tel que $f(x_0) = x_0$.

n = 2. Comme $f(L) \supset K$, d'après le lemme 1, il existe un intervalle compact $I_1 \subset L$ tel que $f(I_1) = K$. Comme $f^{(2)}(I_1) = f(K) \supset L \supset I_1$, par le lemme 2, il existe $x_0 \in I_1$ tel que $f^{(2)}(x_0) = x_0$. On a $x_0 \neq f(x_0)$. En effet, comme $x_0 \in L$ et $f(x_0) \in K$, si $x_0 = f(x_0)$, alors $x_0 = b$, mais alors $f^{(2)}(x_0) = a \neq b$, contradiction.

n $\geq$ 4. Comme $f(L) \supset L$, d'après le lemme 1, il existe un intervalle compact $I_1 \subset L$ tel que $f(I_1) = L$.

Par application itérée du lemme 1, on construit pour tout $2 \leq k \leq n-2$ un intervalle $I_k \subset I_{k-1}$ tel que $f^{(k)}(I_k) = L$ (si I_{k-1} est construit, $f^{(k)}(I_{k-1}) = f(f^{(k-1)}(I_{k-1})) = f(L) \supset L$ on peut donc appliquer le lemme 1 à $f^{(k)}$ pour construire $I_k \subset I_{k-1}$ tel que $f^{(k)}(I_k) = L$).

$f^{(n-1)}(I_{n-2}) = f(f^{(n-2)}(I_{n-2})) = f(L) \supset K$, par le lemme 1, il existe $I_{n-1} \subset I_{n-2}$ tel que $f^{(n-1)}(I_{n-1}) = K$.

Enfin, $f^{(n)}(I_{n-1}) = f(K) \supset L$, il existe donc $I_n \subset I_{n-1}$ tel que $f^{(n)}(I_n) = L$.

Comme $f^{(n)}(I_n) \supset I_n$, d'après le lemme 2, il existe $x_0 \in I_n$ tel que $f^{(n)}(x_0) = x_0$. Supposons qu'il existe $k < n$ tel que $f^{(k)}(x_0) = x_0$. Ceci implique que pour tout $p \geq 1$, $f^{(p)}(x_0) \in \left\{x_0, f(x_0), \cdots, f^{(k-1)}(x_0)\right\} \subset L$. Or, puisque $x_0 \in I_n \subset I_{n-1}$, on a $f^{(n-1)}(x_0) \in K$. Par conséquent, $f^{(n-1)}(x_0) \in L \cap K$, et donc $f^{(n-1)}(x_0) = b$. Mais alors $a = f^{(2)}(b) = f^{(2)}(f^{(n-1)}(x_0)) = f(f^{(n)}(x_0)) = f(x_0) \in L$, ce qui est absurde.

Démonstration du lemme 1 : On peut supposer $\alpha < \beta$. Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in J$ tel que $f(x_1) = \alpha$ et $f(x_2) = \beta$. On peut supposer $x_1 < x_2$, le cas $x_1 > x_2$ se traite de manière analogue.

Posons $r = \sup\{x \in [x_1, x_2];\ f(x) \leq \alpha\}$. On a $f(r) = \alpha$, $r < x_2$ et $f(x) > \alpha$ si $x \in]r, x_2]$.

Posons $s = \inf\{x \in [r, x_2];\ f(x) \geq \beta\}$. On a $f(s) = \beta$ et $f(x) < \beta$ si $x \in [r, s[$.

Par conséquent, $\{\alpha, \beta\} \subset f([r,s]) \subset [\alpha, \beta]$, et par le théorème des valeurs intermédiaires, $f([r,s]) = [\alpha, \beta]$.

Démonstration du lemme 2 : Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(x_1) = \alpha$ et $f(x_2) = \beta$. Posons $g(x) = f(x) - x$. On a $g(x_1) \leq 0$ et $g(x_2) \geq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est à dire $f(x_0) = x_0$.