



**DISVE**  
Pôle Licence

**ANNEE UNIVERSITAIRE 2011/2012**

**DS session de Printemps**

**PARCOURS : MISMI DOM PHY. ING. CODE UE : Q1MI2M21**

**Epreuve : DS Mathématiques**

**Date : 10/04/2012**

**Heure : 11h00**

**Durée : 1h30**

Documents : Non autorisés. La calculatrice homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.



**Exercice 1.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty)$  par  $f(x) = \frac{xe^{-2x}}{2+x}$ .

1. Donnez le tableau de variation de  $f$ .
2. En déduire les extrema locaux et globaux de  $f$  sur  $[0, +\infty)$ . (On précisera leur nature)

**Exercice 2.**

1. Donner l'ensemble de définition puis calculer la dérivée d'ordre  $n$  de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

2. Soit  $x \geq 0$ , montrer l'inégalité

$$1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{(1+x)^5} \leq f(x) \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

*Indication :* On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange à un ordre bien choisi.

3. A partir de l'inégalité précédente, trouver un réel  $a$  (le plus grand possible) tel que l'inégalité

$$\left| f(x) - (1 - x + x^2 - x^3) \right| \leq 10^{-6}$$

soit satisfaite pour tout  $x \in [0, a]$ .

**Exercice 3.**

1. Donner le développement limité de  $\exp(x)$  au point 0 à l'ordre  $n$ .
2. Donner le développement limité de la fonction

$$f(x) = \exp(2 + 2x - x^2)$$

au point 0 à l'ordre 3.

3. Donner l'équation de la tangente et la position de la courbe représentative de  $f$  au voisinage du point  $x = 0$  et représenter sommairement la courbe de  $f$  au voisinage de 0.

**Exercice 4.**

1. Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \ln(1+x^2)}.$$

2. *Bonus :* Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2.$$

**FIN**