Correction du DS du vendredi 26 Avril 2013

Exercice 1

1) $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur I et $a < b \in I$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$\boxed{g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}x^2 g''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}x^3 g'''(c).}$$

2) On considère f définie par $f(x) = e^{-2x}$. Par composition, f est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x} = (-1)^n 2^n e^{-2x}}.$$

Remarque : on peut démontrer cela par récurrence.

3) Soit $x > 0$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à f sur l'intervalle $[0; x]$. Alors il existe $c \in]0; x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(c) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2} \times 4 + \frac{x^3}{6} \times (-2)^3 e^{-2c}.$$

Donc $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}e^{-2c}$. Or,

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\Rightarrow 0 \geq -2c \geq -2x \\ &\Rightarrow 1 \geq e^{-2c} \geq e^{-2x} \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{4}{3}x^3 \geq \frac{4}{3}x^3 e^{-2c} \geq \frac{4}{3}x^3 e^{-2x} \geq 0 \qquad \text{car } x \geq 0 \\ &\Rightarrow -\frac{4}{3}x^3 \leq -\frac{4}{3}x^3 e^{-2c} \leq -\frac{4}{3}x^3 e^{-2x} \leq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \leq f(x) \leq 1 - 2x + 2x^2.}$$

Et l'inégalité est vraie pour $x = 0$ puisque $f(0) = 1$.

4) D'après la question précédente, si $0 \leq x \leq a$, on a $\left|f(x) - \left(1 - 2x + 2x^2\right)\right| \leq \frac{4}{3}x^3 \leq \frac{4}{3}a^3$.

On résout $\frac{4}{3}a^3 = 10^{-6} \Leftrightarrow a^3 = \frac{3}{4}10^{-6} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}10^{-2}$. Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in [0, a], \left|f(x) - \left(1 - 2x + 2x^2\right)\right| \leq 10^{-6}.}$

Remarque : $\approx 0,908 \cdot 10^{-2}$

Exercice 2

1) $g : x \to \ln(1 + x)$ est définie sur $]-1; +\infty[$, $h : x \to x^2 + x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. On cherche quand la fonction polynomiale h de degré 2 s'annule sur $]-1; +\infty[$: son discriminant est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc h ne s'annule pas sur $]-1; +\infty[$. Donc, par quotient, $\underline{f \text{ est définie sur }]-1; +\infty[}$.

2) On sait que $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$ et que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \circ(x^3)$. Comme $X = x + x^2$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on obtient par composition :

$$\frac{1}{1 + (x + x^2)} = 1 - (x + x^2) + (x + x^2)^2 - (x + x^2)^3 + \circ(x^3)$$

Or $(x + x^2)^2 + \circ(x^3) = x(x + x^2) + x^2(x + x^2) + \circ(x^3) = x^2 + x^3 + x^3 + \circ(x^3) = x^2 + 2x^3 + \circ(x^3)$,
et $(x + x^2)^3 + \circ(x^3) = (x + x^2) \cdot (x + x^2)^2 + \circ(x^3) = x(x^2 + 2x^3) + x^2(x^2 + 2x^3) + \circ(x^3) = x^3 + \circ(x^3)$. D'où

$$\frac{1}{1 + (x + x^2)} = 1 - (x + x^2) + (x^2 + 2x^3) - (x^3) + \circ(x^3) = 1 - x + x^3 + \circ(x^3).$$

Par produit f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par

$$\begin{aligned} \frac{2 + \ln(1 + x)}{1 + x + x^2} &= \left(2 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \times \left(1 - x + x^3\right) \circ (x^3) \\ &= \left(2 - 2x + 2x^3\right) + \left(x - x^2\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{3}\right) + \circ(x^3) \\ &= 2 - x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \circ(x^3). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f(x) = 2 - x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{6}x^3 + \circ(x^3)}$.

Remarque : On aurait aussi pu faire ce calcul en faisant la division par les puissances croissantes des deux développpements limités.

3) L'équation de la tangente au graphe de f en 0 est $\boxed{y = 2 - x}$. La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $f(x) - (2-x) = -\frac{3}{2}x^2 + \circ(x^2)$. Au voisinage de 0, $-\frac{3}{2}x^2 \leq 0$ donc, au voisinage de 0, le graphe de f est en-dessous de la tangente en . Dessin demandé.

Exercice 3

1) Soit $x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2+2x-x^2}$ et $\boxed{f'(x) = (2-2x)e^{2+2x-x^2}}$, donc $2(1-x)f(x) = (2-2x)e^{2+2x-x^2} = f'(x)$, donc f vérifie l'équation différentielle $y'(x) = 2(1-x)y(x)$.

2) f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f admet un développement limité de tout ordre en 0 .

3) $\boxed{a_0 = f(0) = e^2}$.

4) f' admet un développement limité d'ordre 3 en 0 car f' est infiniment dérivable en 0 (puisque f l'est), et le développement limité de f' est obtenu en dérivant la partie régulière du développement limité de f, donc

$$\boxed{f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \circ(x^3)}.$$

5) On sait que $f'(x) = (2-2x)f(x)$ donc

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \circ(x^3) = (2-2x) \times \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) + \circ(x^3) \\ \Rightarrow\ & a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \circ(x^3) = \left(2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + 2a_3x^3\right) + \left(-2a_0x - 2a_1x^2 - 2a_2x^3\right) + \circ(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1 & = 2a_0 = 2e^2 \\ 2a_2 & = 2a_1 - 2a_0 \\ 3a_3 & = 2a_2 - 2a_1 \\ 4a_4 & = 2a_3 - 2a_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a_0 & = e^2 \\ a_1 & = 2e^2 \\ a_2 & = a_1 - a_0 = e^2 \\ a_3 & = \frac{2}{3}\cdot(-e^2) = -\frac{2}{3}e^2 \\ a_4 & = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{2}{3}e^2 - e^2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a_0 & = e^2 \\ a_1 & = 2e^2 \\ a_2 & = e^2 \\ a_3 & = -\frac{2}{3}e^2 \\ a_4 & = -\frac{5}{6}e^2 \end{array}\right. .$$

Donc le développement limité de f à l'ordre 4 en 0 est donné par

$$\boxed{f(x) = e^2 \times \left(1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4\right) + \circ(x^4)}.$$

Exercice 4

1) On sait que $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \circ(x^2)}$. *Remarque* : si doutes : calculer les dérivées...

2) Par composition, $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \circ(x^4)$. On sait que $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)$.

Remarque : si on oublie : $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et on est obligé de connaître le DL de e^x ! !

$\frac{\sqrt{1+x^2} - \cosh(x)}{x^4} = \frac{1}{x^4} \times \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) + x^4\epsilon(x)\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \epsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cosh(x)}{x^4} = -\frac{1}{6}}.$$