CONTROLE CONTINU
16 novembre 2018, Durée : 1h40

Tous documents interdits. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. 4 exercices.

Exercice I : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, positives intégrables. On suppose que toutes les espérances sont égales à α. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1) Montrer que le processus $(M_n)_{n\geq 0}$ donné par $M_n = S_n - n\alpha$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ telle que : $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$, et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

2) Soit $n \geq 0$ un entier quelconque. Calculer la valeur de $\mathbf{E}(S_n)$.

Exercice II : On considère un jeu de pile ou face équilibré : le joueur perd sa mise s'il obtient pile et gagne le double de sa mise s'il obtient face. On appelle X_n le résultat du n-ème lancer : $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$, 1 représente l'obtention de face, -1 l'obtention de pile. On appelle $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_1, \ldots, X_n)$.
Le joueur a une richesse initiale de $S_0 = A \geq 0$ €. On appelle (S_n) sa richesse après le n-ème lancer.

Le joueur n'a pas de stratégie particulière. Il mise 1 euro à chaque étape. Quelle est la probabilité qu'après 2N lancers, le jeu ne se soit pas arrêté et que le joueur possède exactement A euros. On rappelle que le jeu s'arrête si le joueur et seulement si à un instant donnén'a plus d'argent à un moment.

Exercice III : On considère le marché financier suivant composé d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué S^1 sur l'ensemble $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, muni de la tribu des parties de Ω et d'une probabilité $\mathbb{P}$ telle que : $\mathbb{P}(w_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq 4$.

	$n=0$ (S_0^0, S_0^1)	$n=1$ (S_1^0, S_1^1)	$n=2$ (S_2^0, S_2^1)
ω_1	$(1, 1)$	$(1.1, 0.8)$	$(1.21, 0.64)$
ω_2	$(1, 1)$	$(1.1, 0.8)$	$(1.21, 0.96)$
ω_3	$(1, 1)$	$(1.1, 1.2)$	$(1.21, 0.96)$
ω_4	$(1, 1)$	$(1.1, 1.2)$	$(1.21, 1.44)$

1) Construire l'arbre des épreuves représentant l'évolution du marché.

2) Expliciter les tribus $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les tribus représentant l'information révélée à chaque instant par l'observation de ce marché. (En particulier, on $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1^1)$).

3) Calculer le taux d'intérêt de l'actif sans risque.

4) On considère la probabilité

$$\mathbf{P}^*(\omega_1) = 1/16, \mathbf{P}^*(\omega_2) = \mathbf{P}^*(\omega_3) = 3/16, \mathbf{P}^*(\omega_1) = 9/16.$$

Donner la définition d'une probabilité risque-neutre puis montrer que $\mathbf{P}^*$ est une probabilité risque-neutre. On notera $(\widetilde{S}_n^1)$ le processus des prix actualisés de l'actif risqué.

5) Rappeler la définition d'un marché viable. Ce marché est-il viable ? Justifiez.

Exercice IV : On considère le modèle de marché.

	$n=0$ (S_0^0, S_0^1)	$n=1$ (S_1^0, S_1^1)
ω_1	$(1,1)$	$(1,1.1)$
ω_2	$(1,1)$	$(1,1.2)$

Montrer que ce marché n'est pas viable. On pourra construire une opportunité d'arbitrage.