Examen

Durée : 1h40

Tous documents interdits, calculatrices autorisées. Justifiez vos réponses, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Exercice 1 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes intégrables et positives. On note $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et pour $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Pour $n \geq 1$, on note $\alpha_n = E[X_n]$ et on suppose que pour tout $n \geq 1$, on a $0 < \alpha_n \leq 1$. On pose $M_0 = 1$ et pour $n \geq 1$

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

Montrer que M_n est une sur-martingale pour la fitltration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2 : On considère le modèle de marché.

	$n=0$ (S_0^0, S_0^1)	$n=1$ (S_1^0, S_1^1)
ω_1	$(1,1)$	$(1.1, 1.1)$
ω_2	$(1,1)$	$(1.1, 1.2)$

1) Donner la définition d'un marché viable.
2) Donner la définition d'un marché complet.
3) Ce marché est-il viable ? (Indication : On pourra construire une opportunité d'arbitrage).

Exercice 3 On considère le modèle de marché :

	$n=0$ (S_0^0, S_0^1)	$n=1$ (S_1^0, S_1^1)	$n=2$ (S_2^0, S_2^1)
ω_1	$(1,1)$	$(1, 0.9)$	$(1, 1.1)$
ω_2	$(1,1)$	$(1, 0.9)$	$(1, 0.8)$
ω_3	$(1,1)$	$(1, 1.1)$	$(1, 1.2)$
ω_4	$(1,1)$	$(1, 1.1)$	$(1, 0.9)$

On considère les probabilités $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$:

$$\mathbb{P}_1(\omega_1) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}_1(\omega_2) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}_1(\omega_3) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}_1(\omega_4) = \frac{1}{4};$$

$$\mathbb{P}_2(\omega_1) = \frac{1}{6}, \mathbb{P}_2(\omega_2) = \frac{2}{6}, \mathbb{P}_2(\omega_3) = \frac{2}{6}, \mathbb{P}_2(\omega_4) = \frac{1}{6}.$$

1) Expliciter les tribus $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les tribus représentant l'information révélée à chaque instant par l'observation de ce marché. (En particulier, on $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1^1)$).
2) Pour $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$, calculer $\mathbb{E}_1[S_2^1|\mathcal{F}_1](w)$.
3) Donner la définition d'une probabilité risque-neutre, puis montrer que $\mathbb{P}_1$ n'est pas une probabilité risque neutre.
4) Montrer que $\mathbb{P}_2$ est une probabilité risque-neutre.
5) Le marché est-il viable ?

Exercice 4 : On considère un marché financier suivant le modèle de Cox Ross et Rubinstein de paramètres $r = 0.1$, $d = -0.1$, $u = 0.2$ sur $\Omega = \{\omega_i,\ 1 \leq i \leq 4\}$. L'actif risqué S^1 prend les valeurs suivantes :

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
ω_1	1	1.2	1.44
ω_2	1	1.2	1.08
ω_3	1	0.9	1.08
ω_4	1	0.9	0.81

1. Pour l'actif non risqué, on suppose que $S_0^0 = 1$. Donner les valeurs de S_1^0 et S_2^0.
2. Dans quels cas un marché de Cox Ross et Rubinstein est-il viable ? complet ?
3. Ce marché est-il viable ? Complet ? Si oui, calculer le paramètre p de l'unique probabilité risque neutre.

On considère maintenant une option d'achat américaine sur ce marché de prix d'exercice $K = 1$ et d'échéance $N = 2$.

4. Pour chaque instant et chaque aléa, calculer le profit que donne l'exercice de l'option.
5. Donner la formule récursive de calcul du prix d'une option américaine d'achat dans le modèle de Cox Ross et Rubinstein.
6. Pour chaque instant et chaque aléa, calculer la valeur de l'option.
7. Donner une formule de date d'exercice optimale d'une option américaine générale.
8. Pour chaque aléa, donner une date d'exercice optimale de l'option.