Master MIMSE spécialité 2
mercredi 12 novembre 2013

Examen de Probabilités: Chaînes de Markov

13h30-15h30

Exercice 1. (5 points environ)
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'espace d'états $E = \{1, 2, 3\}$ de matrice de transition P avec

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On notera μ_0 la loi initiale de la chaîne.

1. Tracer le graphe orienté associé à P. (Voir annexe)
2. Montrer que la chaîne de Markov est irréductible et apériodique.

   On a $1 \to 3 \to 2 \to 1$ donc il n'y a qu'une classe communiquante. La chaîne est irréductible. $P_{1,1} > 0$, donc la période de 1 est 1. La période est une propriété de classe donc la chaîne est apériodique.
3. On vérifie que

$$(2,\,2,\,3)P = (2,\,2,\,3),$$
$$\left(2,\,(\sqrt{2}-2),\,-\sqrt{2}\right)P = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(2,\,(\sqrt{2}-2),\,-\sqrt{2}\right),$$
$$\left(2,\,(-\sqrt{2}-2),\,\sqrt{2}\right)P = \frac{-\sqrt{2}}{4}\left(2,\,(-\sqrt{2}-2),\,\sqrt{2}\right).$$

4. On considère que la loi initiale est donnée par $\mu_0 = \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$. Donner la loi de la chaîne au temps n.

   On a $\mu_0 = \frac{1}{7}(2, 2, 3)$. On en déduit que $\mu_0 P = \mu_0$ et par récurrence immédiate: $\mu_0 P^n = \mu_0$. La loi de la chaîne au temps n est donc encore μ_0. On dit que la mesure μ_0 est invariante.
5. On considère que la loi initiale est donnée par $\mu_0 = \left(\frac{4}{7}, 0, \frac{3}{7}\right)$. En remarquant que

$$\left(\frac{4}{7}, 0, \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right) + \frac{1}{14}\left(2,\,(\sqrt{2}-2),\,-\sqrt{2}\right) + \frac{1}{14}\left(2,\,(-\sqrt{2}-2),\,\sqrt{2}\right);$$

donner la loi de la chaîne au temps n. Quelle est la limite de cette loi quand $n \to +\infty$?

En utilisant la question 3, on trouve que la loi de la chaîne au temps n est donnée par:

$$
\begin{aligned}
\mu_0 P^n &= \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right) P^n + \frac{1}{14}\left(2,\ (\sqrt{2}-2),\ -\sqrt{2}\right) P^n + \frac{1}{14}\left(2,\ (-\sqrt{2}-2),\ \sqrt{2}\right) P^n \\
&= \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right) + \frac{1}{14}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \left(2,\ (\sqrt{2}-2),\ -\sqrt{2}\right) + \frac{1}{14}\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)^n \left(2,\ (-\sqrt{2}-2),\ \sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

$\left|\frac{\sqrt{2}}{4}\right| < 1$ donc $\mu_0 P^n$ converge quand $n \to \infty$ vers la mesure de probabilité invaraiante: $\left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

Exercice 2. (7,5 points environ)
Un robot Google parcourt internet de la manière suivante: quand il est sur une page web, il regarde tous les liens internet présents sur cette page et choisit un de ces liens avec probabilité uniforme.

Ici les pages web présentent les liens suivant:

- Sur la page 1, on trouve un lien vers les pages 2 et 4.
- Sur la page 2, on trouve un lien vers les pages 3 et 6.
- Sur la page 3, on trouve un lien vers la page 6.
- Sur la page 4, on trouve un lien vers la page 5.
- Sur la page 5, on trouve un lien vers la page 4.
- Sur la page 6, on trouve un lien vers la page 1.

1. *Question de cours:* Donner la définition d'une chaîne de Markov.

   Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov** si, pour tout $(n+1)$-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de points de E tel que $\mathbb{P}(\bigcap_{0\le j\le n-1} \{X_j = x_j\}) > 0$ on a

   $$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}).$$

2. Justifier en une phrase que la position du robot Google au cours du temps est une chaîne de Markov homogène.

La position du robot au temps $n+1$ ne dépend pas de toute la trajectoire mais juste de la position du robot à l'instant n. La position du robot peut donc bien être modélisée par une chaîne de Markov. De plus les transitions du robot ne dépendent pas de l'instant de saut, la chaîne de Markov est donc homogène.

Donner sa matrice de transition et tracer le graphe orienté associé.

Voir annexe.

3. Préciser les classes communiquantes. On a $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 1$ et $4 \to 5 \to 4$. On voit facilement (sur le graphe) que les classes communiquantes sont bien $\{1,2,3,6\}$ et $\{4,5\}$.

4. *Question de cours:* Donner la définition d'un état récurrent et d'un état transient. Soit $i \in E$ un état. On note $N_i = N_i(X) = \mathrm{card}\{n \geq 0, X_n = i\}$ le **nombre de passages** de la chaîne en i. L'état i est dit **récurrent** si $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1$. Il est dit **transient** si $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 0$.

5. Préciser les états récurrents et transients de la chaîne de Markov. La classe $\{1,2,3,6\}$ **n'est pas fermée** (car $1 \to 4$). Elle est donc transiente. La classe $\{4,5\}$ est **fermée et finie**. Elle est donc récurrente.

6. *Question de cours:* Donner la définition de la période d'un état. Soit $i \in E$ un état. La **période** $d(i)$ de i est définie par

$$d(i) := \mathrm{PGCD}\{n \geq 1, P^n_{i,i} > 0\}$$

(avec la convention $\mathrm{PGCD}(\emptyset) = \infty$).

7. Donner la période de chaque état.

Pour le point 1, on a les chemins: $1 \to 2 \to 6 \to 1$ et $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 1$. La période de l'état 1 d(1) divise donc le PGCD de 3 et de 4. Or $\mathrm{PGCD}(3,4) = 1$ donc $d(1) = 1$. La période est une propriéte de classe, d'où $d(2) = d(3) = d(6) = 1$.

L'ensemble des longueurs des chemins partant de 4 et revenant en 4 est: $\{2,4,6,\dots\}$. La période de 4 (et de 5) est donc 2.

8. Le robot part (au temps 0) de la page 4. Que se passe-t-il? Donner la loi de la position du robot au temps n.

Au temps 1 nécessairement il sera en 5. Puis au temps 2, il sera nécessairement en 4. On voit donc que si n est pair, X_n sera presque sûrement en 4 et si n est impair X_n sera presque sûrement en 5.

Rq: On aurait pu calculer: $(0,0,0,1,0,0)P, (0,0,0,1,0,0)P^2, \dots$.

9. Le robot part (au temps 0) maintenant de la page 2. Donner la loi de la position du robot au temps 1,2 et 3. On note μ_n la loi de la chaîne au temps n. On peut calculer, $\mu_1 = (0,1,0,0,0,0)P$ puis $\mu_2 = \mu_1 P$ puis $\mu_3 = \mu_2 P$. On trouve $\mu_1 = (0,0,1/2,0,0,1/2)$, $\mu_2 = (1/2,0,0,0,0,1/2)$ et $\mu_3 = (1/2,1/4,0,1/4,0,0)$.

   Rq: On aurait pu aussi suivre ce qui se passe sur le graphe.

Exercice 3. (7,5 points environ)
On considère l'espace d'états $E := \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$. On considère P la matrice définie sur E par:

$$P(k,1) = p_k, \quad P(k,k+1) = q_k \text{ et } P(k,j) = 0 \text{ sinon; pour } k \geq 1.$$

où les nombres p_k et q_k vérifient $0 < p_k < 1$ et $q_k = 1 - p_k$.

1. *Question de cours:* Donner la définition d'une matrice stochastique.

   Une matrice $P = (P_{i,j})_{i,j\in E}$ est une **matrice stochastique** si elle vérifie:

   (a) $\forall i,j \in E, P_{i,j} \geq 0$
   (b) $\forall i \in E, \sum_{j\in E} P_{i,j} = 1$

2. Montrer que P est une matrice stochastique.

   On a bien $P_{i,j} \geq 0$ pour $i,j \in E$ et pour $i \in \mathbb{E}$,

$$\sum_{j\in E} P_{i,j} = P_{i,1} + P_{i,i+1} = p_i + q_i = 1.$$

3. Tracer le graphe orienté associé à P.

   Voir annexe.

4. On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique.

   Soit $i \geq 1$, on a clairement que $1 \to 2 \to \cdots \to i \to 1$. Donc 1 et i sont dans la même classe. Il n'y a donc bien qu'une seule classe: $E = \mathbb{N}^*$. La chaîne est irréductible.

   $P_{1,1} = p_1 > 0$ donc la période de 1 est 1. La chaîne est donc apériodique.

5. *Question de cours:* Donner la définition d'un temps d'arrêt adapté à la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$. Soit τ une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$. On dit que τ est un **temps d'arrêt** adapté à la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si:

(a) τ prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$,

(b) $\forall n \geq 0$, on a $\{\tau \leq n\} \in \sigma(X_0, \ldots X_n)$.

6. On définit le temps de retour en 1 par:

$$\tau_1 := \inf\{k > 0, X_k = 1\}.$$

Montrer que τ_1 est un temps d'arrêt.

τ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^* \bigcup \{\infty\}$. Ensuite, $\{\tau_1 \leq 0\} = \emptyset \in \sigma(X_0)$. Soit $n \geq 1$, on a

$$\{\tau_1 \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k = 1\}.$$

Or $\{X_k = 1\} \in \sigma(X_k) \subset \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Donc par union dénombrable (finie ici) $\{\tau_1 \leq n\} \in \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

7. Dans cette question, on considère que les nombres p_k et q_k sont constants, respectivement égaux à p et q $(0 < p < 1, q = 1 - p)$. Montrer que, partant de 1, τ_1 suit la loi géométrique de paramètre p; c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_1(\tau_1 = n) = q^{n-1}p, \quad n \geq 1.$$

La seule façon partant de 1 d'avoir $\tau_1 = n$ est de faire le chemin $1 \to 2 \to \cdots \to n-1 \to 1$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(\tau_1 = n) &= \mathbb{P}_1(X_2 = 2, X_3 = 3, \ldots, X_{n-1} = n-1, X_n = 1) \\
&= P_{1,2}P_{2,3} \ldots P_{n-2,n-1}P_{n-1,1} \\
&= q^{n-1}p.
\end{aligned}$$

8. *Question de cours* Enoncer le critère de récurrence et de transience faisant intervenir le temps de retour.

L'état i est récurrent si seulement si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$. L'état i est transient si et seulement si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1$.

9. En déduire que la chaîne est récurrente.

On regarde l'état 1. La loi du temps de retour en 1 partant de 1 est un loi géométrique de paramètre p, $p > 0$. On en déduit que ce temps de retour est fini presque sûrement:

$$\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_i(\tau_i = k) = \sum_{k \geq 1} q^{k-1}p = \frac{1}{p}p = 1.$$

L'état 1 (et donc toute la chaîne) est récurrent.

10. On revient maintenant au cas général. Calculer $\mathbb{P}_1(\tau_1 > n)$, $n \in \mathbb{N}$.

    L'évènement $\{\tau_1 > n\}$ partant de 1 correspond exactement à l'évènement $\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 2\} \cap \ldots, \{X_n = n\}$. D'où:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1(\tau_1 > n) &= \mathbb{P}_1(X_2 = 2, X_3 = 3, \ldots, X_{n-1} = n-1, X_n = n) \\ &= P_{1,2}P_{2,3}\ldots P_{n-2,n-1}P_{n-1,n} \\ &= q_1 q_2 \ldots q_{n-1}.\end{aligned}$$

11. On admettra ici que la limite du produit $\prod_{k=1}^n q_k$ est strictement positive si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1} p_k$ est finie. (Le montrer s'il vous reste du temps).

    Que peut-on dire si $p_k = \frac{1}{k+1}$? et si $p_k = \frac{1}{(k+1)^2}$?

    L'intersection: $\bigcap_{n\geq 0}\{\tau_1 > n\}$ est une intersection décroissante dont la limite est l'évènement $\{\tau = +\infty\}$. On en déduit

$$\mathbb{P}_1(\tau = +\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(\tau_1 > n) = \lim_{n\to\infty} q_1 q_2 \ldots q_{n-1}.$$

    Si la limite du produit $q_1 q_2 \ldots q_{n-1}$ est strictement positive: l'état 1 (et toute la chaîne) est transient.

    Si la limite du produit $q_1 q_2 \ldots q_{n-1}$ est 0 : l'état 1 (et toute la chaîne) est récurrent.

    On a:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n q_k = \prod_{k=1}^n e^{\ln q_k} &= \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln q_k\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(1-p_k)\right)\end{aligned}$$

    La limite du produit $\prod_{k=1}^n q_k$ est > 0 si et seulement si la série à termes négatifs $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-p_k)$ est convergente. Si p_k ne tend pas vers 0 quand $k \to 0$, cette série diverge. Si p_k tend vers 0, on a l'équivalent $\ln(1 - p_k) \sim -p_k$ quand $k \to +\infty$. La série étant à termes de signes constants, elle a le même comportement que la série $-\sum_{k=1}^{+\infty} p_k$.

Si $p_k = \frac{1}{k+1}$ cette série diverge donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} q_k \to 0$ quand $n \to +\infty$. La chaîne est alors **récurrente**.

Si $p_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ cette série converge donc $\prod_{k=1}^{n} q_k$ a une limite strictment positive quand $n \to +\infty$. La chaîne est alors **transiente**.

Rq: Dans le cas $p_k = \frac{1}{k+1}$, on a $q_k = \frac{k}{k+1}$ et on peut directement calculer:

$$q_1 q_2 \ldots q_{n-1} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$