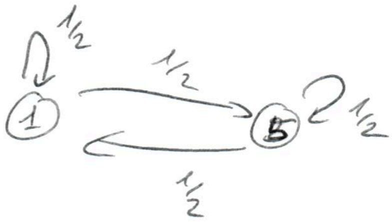
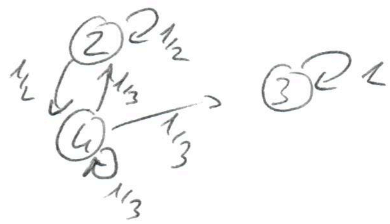
Corrigé : Chaîne de Markov DST 2017

Exercice 1 : A

1)2)3)
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$





classes communiquantes :

$\{1, 5\}$ fermée et finie donc récurrente

$\{2, 4\}$ pas fermée donc transiente

$\{3\}$ récurrente (état absorbant).

4) Soit μ_n la loi de la chaîne au temps n.

Si $X_0 = 1$, la loi initiale est $\mu_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$

alors au temps la loi de la chaîne au temps 1 est :

$$\mu_1 = \mu_0 P = \left(\tfrac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ \tfrac{1}{2}\right)$$

puis $\mu_2 = \mu_1 P = \left(\tfrac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ \tfrac{1}{2}\right) = \mu_1$

et par récurrence immédiate $\mu_n = \mu_1 = \left(\tfrac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ \tfrac{1}{2}\right)$

pour tout $n \geq 1$.

5) Soit $\mu = \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{2}\delta_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$.

$$\mu P^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \mu + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)\delta_3 \quad (*)$$

- $\underline{n=1}$

On a : $\mu P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{6}\mu + \frac{1}{6}\delta_3.$$

- Soit $n \geq 1$, supposons que $\mu P^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \mu + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)\delta_3$

$\underline{\text{alors}}$: $\mu P^{n+1} = (\mu P^n) P$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^n (\mu P) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)(\delta_3 P)$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\mu + \frac{1}{6}\delta_3\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)\delta_3$$

car $\mu P = \frac{5}{6}\mu + \frac{1}{6}\delta_3$ et $\delta_3 P = \delta_3$.

d'où $\mu P^{n+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \mu + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\delta_3.$

$\underline{\text{Conclusion}}$: $(*)$ est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

6) Si $X_0 = 2$, $\mu_0 = (0\ 1\ 0\ 0\ 0)$

et $\mu_1 = \mu_0 P = (0\ \frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ 0) = \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{2}\delta_4$.

On retrouve la mesure μ de la question 5).

d'où pour $\underline{n \geq 2}$, ~~l~~a loi de la chaîne au temps n

est : $\mu_0 P^n = \mu_1 P^{n-1} = \mu P^{n-1}$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\mu + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right)\delta_3 .$$

7) Soit $\pi \in \mathbb{R}^5$ $\pi = (\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5)$.

On commence par résoudre $\pi P = \pi$.

$$\pi P = \pi \iff \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_5 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_4 \\ \pi_3 = \pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4 \\ \pi_4 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_4 \\ \pi_5 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_5 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi_1 = \pi_5 \\ \frac{1}{2}\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_4 \\ \pi_4 = 0 \\ \frac{1}{2}\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_4 \\ \cancel{\pi_1 = \pi_5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \pi_1 = \pi_5 \\ \pi_2 = \pi_4 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solution dans $\mathbb{R}^5$ du système $\pi P = \pi$

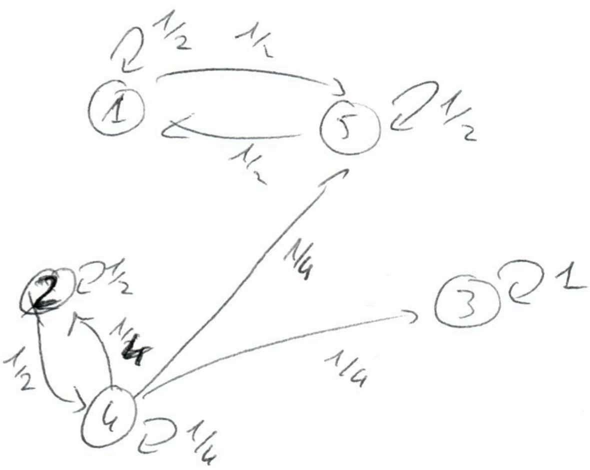
est donné par $S = \{\pi = (a, 0, b, 0, a),\ a, b \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{Y} = \{ \Pi = \alpha \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right) + \beta (0\ 0\ 1\ 0\ 0),$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \}.$

L'ensemble des probabilités invariantes est donc donnée par : $\left\{ \Pi = \alpha \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right) + (1-\alpha)(0\ 0\ 1\ 0\ 0),\ \alpha \in [0,1] \right\}.$

B

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



1) classes communiquantes : $\{1,5\}$ fermée finie donc récurrente
$\{2,4\}$ pas fermée donc transiente.
$\{3\}$ récurrente (état absorbant).

2) On note $S = \inf \{ n \geq 0,\ X_n \in \{1,5\} \}$
$T = \inf \{ n \geq 0,\ X_n = 3 \}.$

S est le temps d'atteinte de l'ensemble $\{1,5\}$
T celui du singleton $\{3\}$

On pose $h(x) = \mathbb{P}_x (S < +\infty).$

On a : si $X_0 = 1$ ou si $X_0 = 5$, $S = 0$

donc $h(1) = h(5) = 1$.

et si $X_0 = 3$, $X_n = 3$ presque sûrement

d'où $S = +\infty$ et $h(3) = 0$.

3) $h(x)$ désigne la probabilité d'absorbtion de la classe $\{1,5\}$ partant de x, d'où :

$$\begin{cases} h(2) = \frac{1}{2} h(2) + \frac{1}{2} h(4) \\ h(4) = \frac{1}{4} h(2) + \frac{1}{4} h(3) + \frac{1}{4} h(4) + \frac{1}{4} h(5) \\ \quad\;\; = \frac{1}{4} h(2) + 0 + \frac{1}{4} h(4) + \frac{1}{4}. \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} h(2) = h(4) \\ h(2) = \frac{1}{2} h(2) + \frac{1}{4} \end{cases}$

d'où $h(2) = h(4) = \frac{1}{2}$.

donc $\mathbb{P}_2(S < +\infty) = \frac{1}{2}$.

4) On pose $v(x) = \mathbb{E}_x[\min(S,T)]$.

$\min(S,T)$ est le temps d'atteinte de l'ensemble $\{1,3,5\}$.

d'où $v(1) = v(3) = v(5) = 0$.

et $\begin{cases} v(2) = 1 + \frac{1}{2} v(2) + \frac{1}{2} v(4) \\ v(4) = 1 + \frac{1}{4} v(2) + \frac{1}{4} v(3) + \frac{1}{4} v(4) + \frac{1}{4} v(5) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} v(2) = 2 + v(4) \\ v(4) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} v(4)\right) + 0 + \frac{1}{4} v(4) + 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} v(2) = 2 + v(4) \\ \frac{1}{2} v(4) = 1 + \frac{1}{2} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} v(2) = 5 \\ v(4) = 3 \end{cases}$

d'où $E_2[\min(S,T)] = 5$.