Correction

(a) Dériver les fonctions $f(x) = 5x\sin(x^2)$ et $g(x) = (\exp(x) + \sin(2x))^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\sin(x^2) + 5x\cos(x^2) \times 2x \\ &= 5\sin(x^2) + 10\cos(x^2)x^2. \end{aligned}$$

$$g'(x) = 4(\exp(x) + \sin(2x))^3(e^x + 2\cos(2x))$$

(b) Déterminer une primitive de la fonction $\sin(7x + 2)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\int \sin(7x+2)dx = -\frac{\cos(7x+2)}{7} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(c) En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_0^\pi x\exp(2x)\,dx$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \exp(2x)$.

On a $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{\exp(2x)}{2}$.

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x\exp(2x)\,dx &= \left[\frac{x\exp(2x)}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\exp(2x)}{2}dx \\ &= \frac{\pi\exp(2\pi)}{2} - \left[\frac{\exp(2x)}{4}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi\exp(2\pi)}{2} - \frac{\exp(2\pi)}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\right)\exp(2\pi) + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(d) Rappelons que $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos(x)^2}$. En effectuant un changement de variables, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)^2\sqrt{\tan(x)}}\,dx$.

(Rappel: $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ et $\tan(\pi/4) = 1$).

On pose $u(x) = \tan(x)$. On a alors $u'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$. Donc

$$\frac{1}{\cos(x)^2\sqrt{\tan(x)}} = \frac{1}{\sqrt{u}(x)} \times u'(x).$$

Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$ est $2\sqrt{u(x)}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)^2\sqrt{\tan(x)}}\,dx &= \left[2\sqrt{\tan(x)}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= 2(3^{1/4} - 1).
\end{aligned}$$