L3 - PROBABILITÉS - Partiel du 18/03/13

EXERCICE 1

① - L'univers Ω contient l'ensemble des différents codes à 6 caractères construits à partir $\begin{cases} \text{des 26 lettres de l'alphabet} \\ \text{et des 10 chiffres de 0 à 9.} \end{cases}$ i.e 36 caractères

Notons E l'ensemble de ces 36 caractères possibles

un code quelconque est un 6-uplet $w = (w_1, \dots, w_6)$ où les w_i sont choisis dans E : ici l'ordre compte et les répétitions d'un même caractère sont possibles

donc $\operatorname{card}(\Omega) = \operatorname{card}(E)^6 = 36^6$

- Ω étant fini, on prend naturellement pour tribu $\mathcal{F}$ l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω.

- les différents codes de Ω sont équiprobables donc comme probabilité P, on prend la probabilité uniforme sur Ω

i.e : $\forall A \subset \Omega, \quad P(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$

② a) A = " le code comporte au moins un chiffre "

$\bar{A} = A^c$ = " le code ne comporte pas de chiffre "

= " le code ne comporte que des lettres de l'alphabet "

Comme dans E, il y a les 26 lettres de l'alphabet, $\operatorname{card}(\bar{A}) = 26^6$

d'où : $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\dfrac{26}{36}\right)^6$

b) B = " le code comporte un seul chiffre qui apparaît exactement deux fois "

Calculons $\operatorname{card}(B)$:

- il y a 10 chiffres possibles dans E donc 10 choix possibles pour l'unique chiffre qui apparaît dans un code de B.

- une fois ce chiffre choisi, il faut le placer exactement 2 fois dans le code. Comme un code comporte 6 caractères, il y a $C_6^2 = \binom{6}{2}$ $= \dfrac{6!}{2!\,4!} = \dfrac{6\times5\times4}{2} = 15$ façons différentes de placer 2 fois le même chiffre exactement dans un code.

- il faut ensuite choisir les 4 caractères restants dans le code. La contrainte est ici que ces caractères ne doivent pas être des chiffres, i.e qu'ils doivent être choisis parmi les 26 lettres de l'alphabet.
Il y a donc 26^4 possibilités pour les 4 caractères restants d'un code de B

par conséquent : $\text{card}(B) = 10 \times C_6^2 \times 26^4 = 150 \times 26^4$ et $P(B) = \dfrac{150 \times 26^4}{36^6}$

(3) On introduit 2 événements : (*) cf Rq page (6)

C = " parmi les deux premiers caractères du code, il y a exactement une fois le chiffre 0"

D = " le code comporte exactement trois fois le chiffre 0"

ici on cherche la probabilité conditionnelle : $P(D/C)$

or $P(D/C) = \dfrac{P(D\cap C)}{P(C)} = \dfrac{\text{card}(D\cap C)}{\text{card}(C)}$

- On a : $\text{card}(C) = C_2^1 \times 35 \times 36^4 = 2 \times 35 \times 36^4$

car :
  - pour placer le chiffre 0 une fois exactement parmi les 2 premiers caractères du code, il y a $C_2^1 = \binom{2}{1} = 2$ places possibles.
  - une fois ce chiffre 0 placé, pour l'autre caractère parmi les 2 premiers caractères, il y a $36 - 1 = 35$ possibilités (tout sauf le 0)
  - ensuite, il faut choisir les 4 derniers caractères d'un code de C pour ces caractères, il n'y a aucune contrainte donc 36^4 choix possibles.

- On a : $\text{card}(C\cap D) = C_2^1 \times C_4^2 \times 35^3 = 2 \times 6 \times 35^3 = 12 \times 35^3$

car :
  - le chiffre 0 apparait au total 3 fois dans un code de $C\cap D$ dont exactement 1 fois parmi les 2 premiers caractères :
il y a $C_2^1 = 2$ façons de placer le 0 une fois parmi les 2 premiers caractères, et $C_4^2 = 6$ façons de placer deux fois le 0 parmi les 4 derniers caractères du code
  - une fois le 0 placé, il faut choisir les 3 autres caractères du code de $C\cap D$: tout est possible sauf le 0 donc il y a :

$(36-1)^3 = 35^3$ choix possibles

par suite : $\boxed{P(D/C)} = \dfrac{\text{card}(C\cap D)}{\text{card}(C)} = \dfrac{12\times 35^3}{2\times 35\times 36^4} = \dfrac{6\times 35^2}{36^4}$.

EXERCICE 2

1 a) Comme $Z \sim \mathcal{E}(a)$, Z admet pour densité : $f_Z(z) = a\,e^{-az}\,\mathbb{1}_{z>0}$

donc $Z(\Omega) =]0;+\infty[$ (p.s)

et $X = \exp(Z)$ est donc p.s à valeurs dans $e^{\mathbb{R}^{+*}} =]1;+\infty[$

- donc $\forall t \le 1$: $F_X(t) = 0$
- $\forall t > 1$: $F_X(t) = P(X \le t) = P(e^Z \le t) = P[Z \le \ln t]$

$$= \int_{-\infty}^{\ln t} f_Z(z)\,dz \underset{t>1}{=} \int_0^{\ln t} a\,e^{-az}\,dz = \left[-e^{-az}\right]_0^{\ln t} = 1 - \frac{1}{t^a}$$

Donc : $F_X(t) = \left(1 - \dfrac{1}{t^a}\right)\mathbb{1}_{t>1} = \left(1 - \dfrac{1}{t^a}\right)\mathbb{1}_{t\ge 1}$

b) - la fonction F_X est clairement continue sur $\mathbb{R}$

- et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

donc X admet une densité de probabilité f_X qui est donnée par :

$$f_X(x) = F_X'(x)\,\mathbb{1}_{x\ne 1} = (1 - x^{-a})'\,\mathbb{1}_{x>1}$$

donc $f_X(x) = \dfrac{a}{x^{a+1}}\,\mathbb{1}_{x>1}$

2 a) soit $k \in \mathbb{N}^*$.

X admet un moment d'ordre k ssi $E[|X|^k] < +\infty$

or $E[|X|^k] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^k f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^{a-k+1}}\,dx$

donc $E(|X|^k) < +\infty \iff a-k+1 > 1$ (critère de Riemann)

$\iff a > k$

b) donc X admet un moment d'ordre k ssi $a > k$

dans ce cas, le moment d'ordre k de X vaut :

$$E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} a\,x^{-a+k-1}\,dx = \left[\frac{a}{-a+k}\,x^{-a+k}\right]_{x=1}^{x=+\infty} = \frac{a}{a-k}$$

$E(X^k) = \dfrac{a}{a-k}$ (si $a > k$)

③ $X \perp\!\!\!\perp Y$, X et Y suivent la loi de Pareto de paramètre a.

$W = \min(X, Y)$

- Calculons F_W la fonction de répartition de W :

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
F_W(t) = P(W \le t) &= 1 - P(W > t) \\
&= 1 - P[\{X > t\} \cap \{Y > t\}] \\
&\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} 1 - P(X > t)\, P(Y > t) \\
&= 1 - (1 - F_X(t))^2 \quad X \text{ et } Y \text{ ont même loi}
\end{aligned}
$$

donc, d'après ① a), on a :

$$
F_W(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{t^{2a}} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}
$$

- on reconnaît la fonction de répartition de la loi de Pareto de paramètre $a' = 2a$

or, la fonction de répartition d'une v.a.a caractérise sa loi, donc

W suit la loi de Pareto de paramètre $2a$.

EXERCICE 3

①a) soit $j \in \mathbb{N}$,

$$
P[M > j] = P[\{X > j\} \cap \{Y > j\}] \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} P(X > j)\, P(Y > j)
$$

or $X, Y \sim \mathcal{G}(p)$

donc

$$
\begin{aligned}
P(X > j) = P(Y > j) &= P(Y \geq j+1) \\
&= \sum_{k \geq j+1} q^{k-1} \times p \\
&= p \times \sum_{k-1 \geq j} q^{k-1} \\
&= p \times q^j \times \sum_{l \geq 0} q^l \\
&= p \times q^j \times \frac{1}{1-q} \quad \text{car } p = 1 - q \\
&= q^j
\end{aligned}
$$

donc $P[M > j] = q^{2j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}$

b) $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $M(\Omega) = \mathbb{N}^*$

soit $j \in \mathbb{N}^*$:

$$P(M = j) = P[j-1 < M \leq j] = P(M \leq j) - P(M \leq j-1)$$
$$= (1 - P(M > j)) - (1 - P(M > j-1))$$
$$= P(M > j-1) - P(M > j)$$
$$\underset{\underset{1a)}{\uparrow}}{=} (q^2)^{j-1}(1-q^2)$$

donc $M \sim \mathcal{G}(1-q^2)$ i.e M suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$

2 a) soit $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

$\{D=i\} \cap \{M=j\} = \{X = Y+i\} \cap \{\min(X,Y) = j\} = (*)$

- si $i < 0$ alors $(*) \underset{\underset{Y+i<Y \text{ donc}}{\uparrow}}{=} \{X = Y+i\} \cap \{X = j\}$

$= \{Y = j-i\} \cap \{X = j\}$

- si $i \geq 0$ alors $Y+i \geq Y$ donc $(*) = \{X = Y+i\} \cap \{Y = j\}$

$= \{X = j+i\} \cap \{Y = j\}$

b) (D, M) est à valeurs dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ p.s puisque X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ p.s

c) loi du couple (D, M) :

soit $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

- si $i < 0$: $P[(D,M) = (i,j)] = P[\{Y = j-i\} \cap \{X = j\}]$

$= P(Y = j-i)\, P(X = j)$ $\quad X \perp\!\!\!\perp Y$

$= p \cdot q^{j-i-1} \times p \cdot q^{j-1}$

$= p^2\, q^{2(j-1)-i}$

- si $i \geq 0$: $P[(D,M) = (i,j)] = P[\{X = j+i\} \cap \{Y = j\}]$

$= P(X = j+i)\, P(Y = j)$ $\quad X \perp\!\!\!\perp Y$

$= p^2 \cdot q^{2(j-1)+i}$

donc : $\forall (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad P[(D,M) = (i,j)] = p^2 \cdot q^{2(j-1)+|i|}$

③ $\forall i \in \mathbb{Z}$,

$$P[D=i] = P[\{D=i\} \cap \{M \in \mathbb{N}^*\}] = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} P[(D,M)=(i,j)]$$

$$= p^2 \cdot \sum_{j \geq 1} q^{2(j-1)+|i|}$$

$$= p^2 \cdot q^{|i|} \underbrace{\sum_{j \geq 1} q^{2(j-1)}}_{= \sum_{j\geq 1} (q^2)^{j-1} = \frac{1}{1-q^2}}$$

$q \in]0,1[$

D'où : $\boxed{\forall i \in \mathbb{Z}, \quad P[D=i] = \frac{p^2}{1-q^2} q^{|i|}}$

④ D et M sont indépendantes ssi $\forall (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$P[(D,M)=(i,j)] = P(D=i) \times P(M=j)$$

or si $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

alors : $P[(D,M)=(i,j)] = p^2 \cdot q^{2(j-1)+|i|}$

$$= \underbrace{\frac{p^2}{1-q^2} q^{|i|}}_{P(D=i)} \times \underbrace{(1-q^2)(q^2)^{j-1}}_{P(M=j)} \quad ✱$$

par ③ → $= P(D=i)$; $= P(M=j)$ par ②

DONC les v.a D et M sont ⫫

Rq ✱ p. ② sur la question ③ de l'EXO 1

on peut <u>intuitivement</u> remarquer que "choisir un code qui compte exactement 3 fois le chiffre 0 avec la contrainte que le chiffre 0 apparait exactement 1 fois parmi les 2 premiers caractères" revient à "choisir un sous-code de 4 caractères qui contient exactement 2 fois le chiffre 0"

or si on note Ω' = "l'ensemble des sous-codes de 4 caractères pris dans E"

A' = "les sous-codes de Ω' qui contiennent exactement 2 fois le chiffre 0"

il y a équiprobabilité sur $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'))$

et $\text{card}(\Omega') = 36^4$, $\text{card}(A') = \underbrace{C_4^2}_{\text{on place le 0}} \times \underbrace{35^2}_{\text{choix des 2 autres caractères } (\neq 0) \text{ du sous-code}}$

et $P(D/C) = \dfrac{\text{card}(A')}{\text{card}(\Omega')}$ #