# Probabilités DM2

A rendre Semaine 14

## Exercice 1. Contre-exemple aux théorèmes des moments.

**Partie A)** Soit $X$ une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note $\phi_X$ la fonction caractéristique de $X$.
1) a) Montrer que $\phi_X$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\phi_X$ vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) + ty(t) = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle puis en déduire que pour tout réel $t$, $\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

b) Montrer que $X$ a des moments de tous ordres donnés par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{E}(X^{2k+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k.k!}.$$

2) En déduire la fonction caractéristique d'une loi Normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

3) En déduire que si $Y$ et $Z$ sont deux variables aléatoires suivant chacune une loi normale et indépendantes alors $Y + Z$ suit encore une loi normale.

**Partie B)** Dans le cours, on a vu que pour une variable aléatoire bornée, la connaissance de tous ses moments caractérise sa loi. Dans cette partie, nous allons montrer que de manière générale le résultat est faux : les moments d'une variable aléatoire ne caractérisent pas sa loi.

On dit que $Z$ *suit la loi log-normale (de paramètres 0 et 1)* si $Z$ s'écrit $Z = e^X$ avec $X$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Montrer que $Z$ a pour densité

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z} e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(z).$$

2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose alors : $f_{a,\alpha}(x) = f(x)\left(1 + a\sin(\alpha \ln x)\right)$.
Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur $a$ et $\alpha$ pour que $f_{a,\alpha}$ soit une densité de probabilité. (On pourra remarquer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} \sin(\alpha u)\, du = 0$.)

3) On prend maintenant $a \in [-1,1]$ et $\alpha = 2\pi$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ku} e^{-u^2/2} \sin(2\pi u)\, du = 0.$$

(*Indication :* On pourra par exemple écrire $\int_{\mathbb{R}} e^{ku} e^{-u^2/2} e^{i\alpha u}\, du$ à l'aide de la fonction caractéristique d'une loi normale bien choisie.)

4) En déduire que si $Z_a$ est une variable aléatoire de densité $f_{a,2\pi}$, alors $Z_a$ et $Z$ ont mêmes moments et que les moments ne caractérisent pas la loi.

## Exercice 2.

1) Soit $X$ une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Soit $a > 0$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[X^2 \mathbf{1}_{\{|X| \geq \sqrt{n}a\}}\right] \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On suppose que la loi commune possède un moment d'ordre 2 fini. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$M_n = \max_{1\leq k\leq n} |X_k|.$$

Le but de cette question est de montrer que $(M_n/\sqrt{n})$ converge en probabilité vers 0.

a) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right) = 1 - \left(\mathbb{P}(|X_1| < \varepsilon\sqrt{n})\right)^n$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$, on note $\alpha_n(\varepsilon) := \mathbb{E}\left[X_1^2 \mathbf{1}_{\{|X_1| \geq \varepsilon\sqrt{n}\}}\right]$, montrer que

$$\mathbb{P}(|X_1| < \varepsilon\sqrt{n}) \geq 1 - \frac{\alpha_n(\varepsilon)}{n\varepsilon^2}.$$

c) Conclure.

**Exercice 3.** **Loi forte des grands nombres version avec existence de la transformée de Laplace.**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle telle que : $\mathbb{E}[e^{t|X|}]$ est fini pour tout $t \geq 0$. (Noter que ceci implique en particulier que $X$ est intégrable).
Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que $X$.
On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, le but est de montrer que $S_n/n$ converge presque sûrement vers $m = \mathbb{E}[X]$. Pour simplifier, on suppose également que $m = 0$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\varepsilon n t}\left(\mathbb{E}[e^{tX}]\right)^n.$$

b) On pose $\alpha = \inf_{t\geq 0} e^{-\varepsilon t}\mathbb{E}[e^{tX}]$, montrer que $\alpha < 1$ (on pourra dériver en 0 la fonction $h \; : \; t \mapsto e^{-\varepsilon t}\mathbb{E}[e^{tX}]$) et que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \alpha^n.$$

c) En déduire que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) < +\infty$. Puis justifier que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) < +\infty$.

d) Conclure.

**Exercice 4.** 1) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$e^{\frac{-x^2}{2}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leq \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt \leq e^{\frac{-x^2}{2}}\frac{1}{x}.$$

(Pour la minoration, on pourra commencer par faire une intégration par parties. Pour les deux inégalités on pourra penser à faire apparaître $\frac{t}{x}$.)

2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \left\{\frac{X_n}{\sqrt{2\ln n}} \geq 1 - \varepsilon\right\}$$

Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$B_n = \left\{\frac{X_n}{\sqrt{2\ln n}} \geq 1 + \varepsilon\right\}$$

Montrer que $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 0$.

4) En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\limsup\left(\frac{X_n}{\sqrt{2\ln n}}\right) = 1\right\}\right) = 1.$$