université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2015/2016** **SESSION 1 DE PRINTEMPS** **PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales et L3 Ingénierie Mathématique **CODE UE** : M1MA6M11 **Epreuve : Probabilités** **Date : 28/04/2016** **Heure : 14h-17h** **Durée : 3h** *Responsable de l'épreuve*: M. Bonnefont *Documents*: Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Département Licence

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et ε une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$ indépendante de X. On note $q = 1 - p$.

On pose $Y = \varepsilon + (1 - \varepsilon)(1 + X)$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y = k)$. On pourra séparer les cas $k = 1$ et $k \geq 2$.

2) On suppose que X est intégrable. Justifier que Y est intégrable puis calculer $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de p, q et $\mathbb{E}[X]$.

3) On suppose maintenant que Y a même loi que X. Montrer qu'alors X suit nécessairement une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

4) En déduire l'espérance de la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$.

Exercice 2. **Partie A** La loi triangulaire est beaucoup utilisée en traitement du son ou de l'image. On dit que X suit la loi triangulaire $\mathcal{T}(a)$ avec $a > 0$ si sa densité est donnée par,

$$f_X(x) = \frac{1}{a^2}(a - |x|)\,\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$$

1) Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité et représenter cette densité.
2) Calculer son espérance et sa variance.
3) Calculer $\mathbb{P}(2|X| \geq a)$.
4) Calculer la loi de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{|X|}$. On donnera notamment sa densité.

Partie B Soient X et Y deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[-1, 1]$ indépendantes. Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels positifs. On pose

$$U = a\left(\frac{X+Y}{2}\right) \text{ et } V = b\left(\frac{X-Y}{2}\right).$$

1) Soient $\mathcal{D}$ le carré $[-1, 1]^2$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} \leq 1\}$ le losange de base $[-a, a]$ et de hauteur $[-b, b]$.

On admet que l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(x, y) = \left(a\left(\frac{x+y}{2}\right), b\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$$

réalise une bijection de $\mathcal{D}$ sur Δ. Montrer que ϕ est en fait un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $\mathcal{D}$ sur Δ.

2) Montrer que le couple (U, V) admet une densité et donner cette densité.

3) Montrer que U suit la loi $\mathcal{T}(a)$ et que V suit la loi $\mathcal{T}(b)$.

4) Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes.

Exercice 3.

Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que la loi de X_n est donnée par

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\ln n} \\ \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln n} \\ \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln n} \end{cases}$$

On pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^n X_i$.

1) Calculer $\mathbb{E}[X_i]$, pour $i \geq 2$.
2) Montrer que Y_n converge dans L^2 et en probabilité vers 0.
3) Montrer que $\frac{X_n}{n}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.
4) En notant que $\frac{X_n}{n} = Y_n - \frac{n-1}{n}Y_{n-1}$, montrer que Y_n ne converge pas presque sûrement vers 0.

Exercice 4.
1) Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que sa fonction caractéristique vérifie

$$\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)},\ t \in \mathbb{R}.$$

2) Soit U de loi uniforme sur $[0,1]$, calculer la fonction caratéristique de U.
3) Montrer qu'il n'existe pas de variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi telles que $X - Y$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 5. Soit μ et ν deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ qui admettent un moment d'ordre 2. On définit la distance de Wasserstein (au carré) entre μ et ν par

$$\mathcal{W}(\mu,\nu)^2 = \inf \mathbb{E}[|X-Y|^2]$$

où l'infimum est pris sur tous les vecteurs aléatoires (X,Y) ayant μ et ν pour lois marginales.

On note m_1 et σ_1^2 la moyenne et la variance de μ et m_2 et σ_2^2 la moyenne et la variance de ν.

1) Soient (X,Y) un vecteur aléatoire de lois marginales μ et ν. Soit $\tilde{X} = X - m_1$ et $\tilde{Y} = Y - m_2$. Montrer que

$$\mathbb{E}[|X-Y|^2] = (m_1-m_2)^2 + \mathbb{E}[|\tilde{X}-\tilde{Y}|^2]$$

2) Montrer que

$$\mathbb{E}[|\tilde{X}-\tilde{Y}|^2] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C$$

avec $C = Cov(\tilde{X},\tilde{Y})$.

3) Justifier que

$$|Cov(\tilde{X},\tilde{Y})| \leq \sigma_1\sigma_2.$$

4) En déduire que

$$\mathcal{W}(\mu,\nu)^2 \geq (m_1-m_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_2)^2.$$

5) Donner une condition suffisante sur μ et ν pour que

$$\mathcal{W}(\mu,\nu)^2 = (m_1-m_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_2)^2.$$

Indication: On pourra s'intéresser au cas d'égalité de la question 3).

6) Que vaut donc $\mathcal{W}(\mu,\nu)^2$ lorsque μ et ν sont toutes les deux des lois normales?

Exercice 6. Soit (X,Y,Z) un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^3$, de loi $\mathcal{N}(0,\Gamma)$ où la matrice Γ est donnée par

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $$U = -X+Y+Z, \qquad V = X-Y+Z, \qquad W = X+Y-Z.$$

1) Déterminer la loi du vecteur aléatoire (U,V,W).

2) En déduire la loi de la variable aléatoire

$$T = \frac{(U+V+W)^2}{12}.$$