Exercice 1 :

1) Si $\varepsilon = 1$, $Y = 1$

Si $\varepsilon = 0$, $Y = 1 + X \geq 2$

donc $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = p$

et si $k \geq 2$, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(\{Y=k\} \cap \{\varepsilon = 0\}) + \mathbb{P}(\{Y=k\} \cap \{\varepsilon=1\})$

$= \mathbb{P}(\{\varepsilon = 0\} \cap (1+X) = k) + 0$

$= \mathbb{P}(\varepsilon = 0) \times \mathbb{P}(X = k-1)$ (indépendance)

$= q \times \mathbb{P}(X=k-1)$

2) $|Y| \leq 1 + |X|$

donc $\mathbb{E}[|Y|] \leq \mathbb{E}[1+|X|] < +\infty$.

donc Y est intégrable.

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\varepsilon + (1-\varepsilon)(1+X)]$

$= \mathbb{E}[\varepsilon] + \mathbb{E}[(1-\varepsilon)](1+\mathbb{E}[X])$ par linéarité et indépendance

donc $\mathbb{E}[Y] = p + q(1+\mathbb{E}[X])$

3) Si Y a même loi que X,

alors $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1) = p$

et pour $k \geq 2$

$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = q\,\mathbb{P}(X=k-1)$.

Et par récurrence immédiate

$\mathbb{P}(X=k) = q^{k-1}\,\mathbb{P}(X=1) = q^{k-1} p$ pour $k \geq 2$.

donc $X \sim \mathcal{G}(p)$.

4) On vérifie que, réciproquement, si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

alors $Y = \varepsilon + (1-\varepsilon)(1+X)$ suit aussi la loi $\mathcal{G}(p)$.

et donc $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$

Or, $\mathbb{E}[Y] = p + q\,(1 + \mathbb{E}[X])$

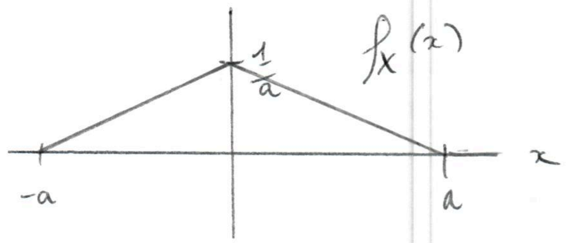
(on a aussi montré que)

donc $(1-q)\,\mathbb{E}[X] = p+q$

c'est-à-dire $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$.

Exercice 2 Partie A :

1)



f_X est mesurable, ≥ 0 et $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx$ vaut 2 fois l'aire du triangle donc $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \frac{1}{a} \times a = 1$.

f_X est bien une densité.

2) $f_X(x) = 0$ si $|x| \geq a$

donc si X admet pour densité f_X, X est à valeurs dans $[-a,a]$

et donc X admet des moments de tout ordre.

Donc $E[X]$ et $E[X^2]$ sont bien définies

et $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = 0$ par parité.

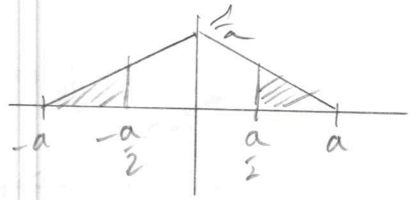
et
$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx$$
$$= 2\int_0^a x^2 f_X(x)\,dx$$
$$= \frac{a^2}{6} \quad \text{(après calcul)}$$

D'où
$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$
$$= \frac{a^2}{6}.$$

3) $\mathbb{P}(2|X| \geq a)$

$= \mathbb{P}(|X| \geq \frac{a}{2})$

$= \mathbb{P}(X \geq \frac{a}{2}) + \mathbb{P}(X \leq -\frac{a}{2})$



$= 2\mathbb{P}(X \geq \frac{a}{2})$ par symétrie

$= 2 \int_{\frac{a}{2}}^{a} f_X(x)\, dx = 2 \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} \times \frac{1}{2a}\right)\right)}_{\text{aire du triangle hachuré.}} = \frac{1}{4}$

4) Soit $Y = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{|X|}$.

Y est à valeurs dans $[0,1]$ car X est à valeurs dans $[-a, a]$.

Pour trouver la loi de Y, on cherche sa fonction de répartition.

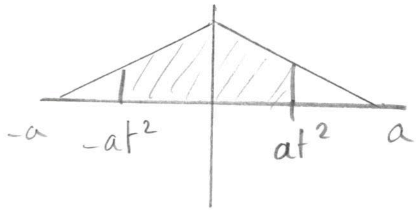
Soit $\underline{0 \leq t \leq 1}$.

$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{|X|} \leq t\right)$

$= \mathbb{P}(|X| \leq at^2)$

$= \mathbb{P}(-at^2 \leq X \leq at^2)$



$= 2\,\mathbb{P}(0 \leq X \leq at^2)$

$= 2 \int_0^{at^2} f_X(x)\, dx$ car $0 \leq t^2 \leq 1$.

$= 2 \int_0^{at^2} \frac{a-x}{a^2}\, dx = 2\left[\frac{ax - \frac{x^2}{2}}{a^2}\right]_0^{t^2 a} = 2t^2 - t^4.$

2) Pour montrer que (U,V) est à densité, appliquons la technique de la fonction muette.

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue, bornée.

$E[h(U,V)]$

$= E\left[h\left(\frac{a}{2}(X+Y), \frac{b}{2}(X-Y) \right) \right]$

Or X et Y sont indépendantes de loi uniforme sur $[-1,1]$.

donc (X,Y) admet pour densité :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$$

$$= \frac{1}{4} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(x,y).$$

Donc $E[h(U,V)]$

$$= \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{4} h\left(\frac{a}{2}(x+y), \frac{b}{2}(x-y) \right) dx\, dy$$

$$= \iint_{\Delta} \frac{1}{4} h(u,v) \, |J_\varphi(u,v)| \, du\, dv$$

par changement de variables et $|J_\varphi(u,v)| = \frac{2}{ab}$

(" $dx\, dy = |J_\varphi(u,v)| \, du\, dv$ ")

et $\begin{cases} F_Y(t) = 0 \text{ si } t<0 \\ F_Y(t) = 1 \text{ si } t \geq 1. \end{cases}$

F_Y est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et

donc Y admet pour densité :

$$f_Y(t) = 4(t-t^3)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t).$$

et $F_Y'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 4(t-t^3) & \text{si } 0<t<1 \\ 0 & \text{si } t>1 \end{cases}$

II) Partie B :

1) Si on admet que φ réalise une bijection de $\mathcal{D}$ sur Δ.

Pour montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme, il suffit de montrer que ~~le~~ déterminant de la matrice Jacobienne est non nul en tout point.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$ donc $J_\varphi(x,y) = -\frac{ab}{2} \neq 0$

Puisque nous en aurons besoin pour la suite, calculons l'inverse de φ :

$$(u,v) = \varphi(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{a} + \frac{v}{b} \\ y = \frac{u}{a} - \frac{v}{b} \end{cases}$$

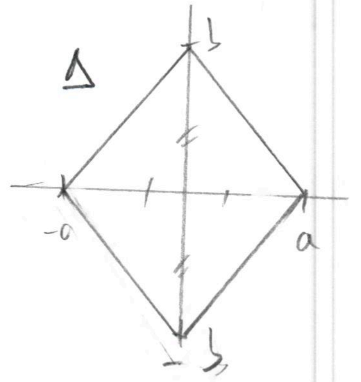
$(x,y) = \psi(u,v)$

avec $\psi(u,v) = \left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}, \frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)$.

d'où $E[h(U,V)]$

$$= \frac{1}{2ab} \iint_\Delta h(u,v)\, du\, dv.$$

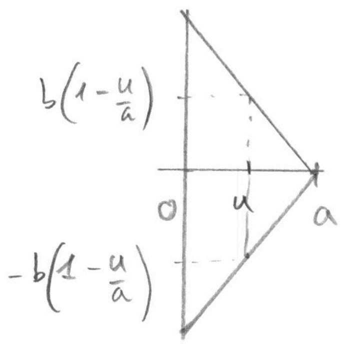
donc (U,V) a pour densité $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2ab} \mathbb{1}_\Delta(u,v)$



(Rq : (U,V) suit donc la loi uniforme sur le losange. L'aire du losange est bien : $2ab$).

3) U est à valeurs dans $[-a,a]$ et pour trouver la densité de U, on intègre la densité de (U,V) par rapport à v.

Soit $0 \leq u \leq a$, $f_U(u) = \int_{v\in\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\, dv$



$$= \frac{1}{2ab} \int_{-b(1-\frac{u}{a})}^{b(1-\frac{u}{a})} dv$$

$$= \frac{1}{a}\left(1-\frac{u}{a}\right) = \frac{a-u}{a^2}.$$

et par symétrie, si $-a \leq u \leq 0$,

$$f_U(u) = f_U(|u|) = \frac{a-|u|}{a^2}$$

donc $U \sim \mathcal{E}(a)$.

De même $V \sim \mathcal{E}(b)$.

4) $f_{(U,V)}(u,v) \neq f_U(u)\, f_V(v)$

donc les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 :

1) Soit $i \geq e$,

on a $\mathbb{E}[X_i] = i\,\mathbb{P}(X_i = i) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_i = 0) - i\,\mathbb{P}(X = -i)$

$= 0$.

2) De même $\mathbb{E}[X_i^2] = i^2\,\mathbb{P}(X = i) + 0^2\,\mathbb{P}(X_i = 0) + i^2\,\mathbb{P}(X = i)$

$= \frac{i}{\ln i}$.

On remarque que $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}[X_i] = 0$.

Donc $\mathbb{E}[Y_n^2] = \mathrm{Var}(Y_n)$.

$Y_n \xrightarrow{L^2} 0$ si et seulement si $\mathbb{E}[|Y_n - 0|^2] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Or $\mathbb{E}[Y_n^2] = \mathrm{Var}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$ par indépendance

$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n} \frac{i}{\ln i}$

Or $\frac{x}{\ln x}$ est croissante pour $x \geq e$

donc $\mathbb{E}[Y_n^2] \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{\ln 2} + (n-3)\frac{n}{\ln n}\right)$

$\leq \underbrace{\frac{1}{n^2}\frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{\ln n}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$ pour $n \geq 3$.

donc $\mathbb{E}[Y_n^2] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

et $Y_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{L^2}} 0$.

Par Bienaimé - Tchebychev (ou Markov)
on déduit que $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

3) On a : $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$ si et seulement si :

pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\limsup \left\{\left|\frac{X_n}{n} - 0\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$.

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

on a $\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{X_n}{n} - 0\right| \geq \frac{1}{2}\right\}\right) = \mathbb{P}(X_n = n) + \mathbb{P}(X_n = -n)$

$$= \frac{1}{n \ln n}.$$

donc $\sum_{n\geq 2} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq \frac{1}{2}\right) = +\infty$ car la série de

Bertrand diverge.

De plus, les événement $\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq \frac{1}{2}\right)_{n\geq 2}$ sont indépendants

car les variables aléatoires X_n le sont.

Donc d'après Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\limsup \left\{\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq \frac{1}{2}\right\}\right) = 1$$

donc $\frac{X_n}{n} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$.

4) Montrons par l'absurde que Y_n ne converge pas vers 0. 11

Soit $n \geq 3$, on a : $Y_n - \frac{n-1}{n} Y_{n-1} = \frac{X_n}{n}$.

Si Y_n ~~convergeait~~ p.s vers 0

alors $\frac{n-1}{n} Y_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$

et $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$ contradiction

donc $Y_n \cancel{\xrightarrow[n \to +\infty]{p.s}} 0$

Ex 4 : 1) Par linéarité

$$\phi_X(-t) = E[e^{-itX}]$$

$$= E[\overline{e^{itX}}] \quad \text{car } X \text{ est réelle.}$$

$$= \overline{E[e^{itX}]} \quad \text{par linéarité.}$$

$$= \overline{\phi_X(t)}$$

2) Si U est de loi uniforme sur $[0,1]$

U a pour densité $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

$$\text{et} \quad \phi_U(t) = E[e^{itU}]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{itx}\, dx = \left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_0^1 \quad \text{si } t \neq 0$$

$$= \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

et $\phi_U(0) = 1$.

3) Supposons par l'absurde qu'il existe X, Y indépendants et de même loi telles que : $X - Y$ est de loi uniforme sur $[0,1]$

Alors pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{X-Y}(t) = \phi_U(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

$$\parallel$$

$$E[e^{it(X-Y)}] = E[e^{itX}]\, E[e^{-itY}] = \phi_X(t)\, \phi_Y(-t)$$

Or Y et X ont même loi

d'où $\phi_{X-Y}(t) = \phi_X(t)\,\phi_X(-t)$

$$= \phi_X(t)\,\overline{\phi_X(t)}$$

$$= |\phi_X(t)|^2 \in$$

d'où ϕ_{X-Y} est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Or $\phi_U(\cancel{\pi t}) = \dfrac{e^{i\pi} - 1}{i\pi} = \dfrac{i}{\pi} \notin \mathbb{R}_+$ contradiction.

d'où

Exercice 5 :

1) $\mathbb{E}[\tilde{X}] = \mathbb{E}[X - m_1] = 0$ et $\mathbb{E}[\tilde{Y}] = 0$

d'où $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$

$$= \mathbb{E}\left[\left((\tilde{X} - \tilde{Y}) + (m_1 - m_2)\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(\tilde{X} - \tilde{Y})^2\right] + 2(m_1 - m_2)\underbrace{\mathbb{E}(\tilde{X} - \tilde{Y})}_{= 0} + (m_1 - m_2)^2$$

2) En développant :

$$\mathbb{E}(\tilde{X} - \tilde{Y})^2 = \mathbb{E}[\tilde{X}^2] + \mathbb{E}[\tilde{Y}^2] - 2\,\mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{Y}]$$

$$= \left(\mathbb{E}[\tilde{X}^2] - \mathbb{E}[\tilde{X}]^2\right) + \left(\mathbb{E}[\tilde{Y}^2] - \mathbb{E}[\tilde{Y}]^2\right)$$

$$- 2\left(\mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{Y}] - \mathbb{E}[\tilde{X}]\,\mathbb{E}[\tilde{Y}]\right)$$

$$= \mathrm{Var}(\tilde{X}) + \mathrm{Var}(\tilde{Y}) - 2\,\mathrm{Cov}(\tilde{X}, \tilde{Y})$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C$$

car $\mathbb{E}[\tilde{X}] = \mathbb{E}[\tilde{Y}] = 0$.

3) Par Cauchy-Schwarz :

$$|\mathrm{Cov}(\tilde{X}, \tilde{Y})| \leq \mathrm{Var}(\tilde{X})^{1/2}\,\mathrm{Var}(\tilde{Y})^{1/2} = \sigma_1 \sigma_2 .$$

4) Soit (X, Y) un couple de marginales μ et ν.

Alors $\mathbb{E}[|X - Y|] =$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\mathrm{Cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + (m_1 - m_2)^2$$

$$\geq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + (m_1 - m_2)^2$$

$$= (m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 .$$

d'où $W(\mu,\nu)^2 = \inf_{(X,Y)} E[|X-Y|^2]$

$$\geq (m_1 - m_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2.$$

5) Soit X de loi μ.

si $Y = \alpha X$ a pour loi ν.

alors on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

et $E[|X-Y|^2] = (m_1-m_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_2)^2$

d'où $W(\mu,\nu) = (m_1-m_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_2)^2$.

6) Si μ est la $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et ν la loi $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$

Si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ $\qquad$ $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$

$\tilde{X} = X - m_1$

si $\tilde{Y} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\tilde{X})$

et $Y = m_2 + \tilde{Y}. = m_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X - m_1)$

alors Y est encore une loi normale et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$

on a alors égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz du 3)

D'où $W^2(\mu,\nu) = (m_1-m_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_2)^2$.

Exercice 6 :

(16)

1) On a : $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Le vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ est une transformation linéaire d'un vecteur gaussien, donc c'est aussi un vecteur gaussien. Sa loi est caractérisée par son vecteur espérance et sa matrice de covariance.

- $E\left[\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}\right] = A\, E\left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Sa matrice de covariance Γ' est donnée par :

$$\Gamma' = E\left(\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} (U\ V\ W)\right) = A\, E\left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} (X\ Y\ Z)\right] A^t$$

$$= A \Gamma A^t$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2) La matrice de covariance Γ' est diagonale donc U, V, W sont indépendants et de loi $\mathcal{N}(0,4)$.

donc $U+V+W$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 4+4+4) = \mathcal{N}(0,12)$

et $\frac{U+V+W}{\sqrt{12}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

D'où $\frac{(U+V+W)^2}{12}$ suit une loi $\chi^2(1)$.