Correction DS Probabilités L3

Ex 1 :

A) Soit $a>0$ et $b>0$ et $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda>0$.

On a :

$$\mathbb{P}(X<a) = \mathbb{P}(X\in[0,a]) = \int_0^a f(u)\,du = \int_0^a \lambda e^{-\lambda u}\,du = \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^a = 1-e^{-\lambda a}.$$

De même $\mathbb{P}(X>b) = \int_b^{+\infty} f(u)\,du = \left[-e^{-\lambda u}\right]_b^{+\infty} = e^{-\lambda b}$.

B) On note les événements :

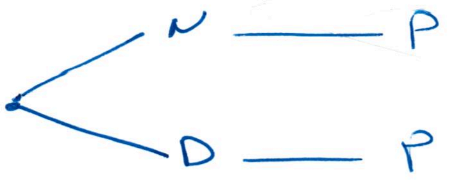
N : " l'ampoule choisie est normale "

D : " l'ampoule choisie est défectueuse "

P : " l'ampoule tombe en panne avant la fin du 30ième jour "

F : " l'ampoule fonctionne encore après une année "

1)



On cherche la probabilité de P.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P \cap N) + \mathbb{P}(P \cap D)$$
$$= \mathbb{P}(P|N)\,\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(P|D)\,\mathbb{P}(D).$$

D'après l'énoncé : $\mathbb{P}(N) = \dfrac{1}{10}$, $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(N) = \dfrac{9}{10}$.

$$\mathbb{P}(P|N) = \mathbb{P}(X < 30) \text{ avec } X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{1000}\right)$$
$$= 1 - e^{-0,03}$$

$$\mathbb{P}(P|D) = \mathbb{P}(Y < 30) \text{ avec } Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{100}\right)$$
$$= 1 - e^{-0,3}.$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(P) = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-0,03}\right) + \frac{9}{10}\left(1 - e^{-0,3}\right)$$
$$\simeq 0,24$$

2) On cherche $\mathbb{P}(D|F)$.

Par la formule de Bayes : (et les probabilités totales).

$$\mathbb{P}(D|F) = \frac{\mathbb{P}(D \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(F|D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(F)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(F|D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(F|D)\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(F|N)\,\mathbb{P}(N)}$$

On $\mathbb{P}(F \mid N) = \mathbb{P}(X > 365)$

$$= e^{-0,365}$$

et $\mathbb{P}(F \mid D) = \mathbb{P}(Y > 365) = e^{-3,65}$

d'où $$\mathbb{P}(D \mid F) = \frac{e^{-3,65} \times \frac{9}{10}}{e^{-3,65} \times \frac{9}{10} + e^{-0,365} \times \frac{1}{10}}$$

$$\simeq 0,25.$$

Exercice 2 : On note $\mathcal{A}$ l'alphabet.

1) Cela revient à faire un tirage avec remise de 7 lettres dans $\mathcal{A}$.

$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7) \text{ avec } \omega_i \in \mathcal{A} \quad 1 \leq i \leq 7\}$
$= \mathcal{A}^7$.

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Tous les résultats sont alors équiprobables donc $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

a) Soit A : " au moins 1 voyelle et au moins 1 consonne ".

Le complémentaire de A est : "le singe n'a tapé que sur des voyelles" V ou "le singe n'a tapé que sur des consonnes." C

$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(C)$ car V et C sont disjoints

$V = \{a, e, i, o, u, y\}^7$

$$\mathbb{P}(V) = \frac{|V|}{|\Omega|} = \left(\frac{6}{26}\right)^7 \simeq 3{,}5 \times 10^{-5}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \left(\frac{20}{26}\right)^7 \simeq 0{,}16$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{6^7 + 20^7}{26^7} \simeq 0{,}84.$$

B) Soit B = "le mot obtenu comporte exactement 3 fois Z"

ex : Z x x Z Z x x

x Z x Z x x Z

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{7}{3} \times 25^4}{26^7} \simeq 1{,}7 \times 10^{-3}.$$

choix de la place des 3 Z

choix des 4 autres parmi les 25 possible.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5.$$

2) On a maintenant un tirage sans remise. (5)

Soit C l'événement : " le mot obtenu a au moins 4 voyelles ".

On a $C = C_4 \cup C_5 \cup C_6$

avec C_i : " le mot obtenu a exactement i voyelles ".

On choisit l'univers : (on considère qu'on tire les 7 lettres à la fois)

$$\Omega' = \left\{ \omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_7\} \text{ avec } \omega_i \in \mathcal{A} \ \ 1 \leq i \leq 7 \text{ et } \omega_i \neq \omega_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

$\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$

Tous les résultats sont équiprobables donc $\mathbb{P}'$ est la probabilité uniforme sur Ω'.

$$\mathbb{P}'(C) = \mathbb{P}'(C_4) + \mathbb{P}'(C_5) + \mathbb{P}'(C_6)$$

Pour décrire C_4, il faut décrire les

- les 4 voyelles $\binom{6}{4}$ possibilités
- et les 3 consonnes $\binom{20}{3}$ possibilités.

⑥

donc $\mathbb{P}'(C_4) = \dfrac{\binom{6}{4} \times \binom{20}{3}}{\binom{26}{7}}$

$\overset{\shortparallel}{\dfrac{|C_4|}{|\Omega|}}$

$$= \frac{\frac{6\times 5}{2} \times \frac{20\times 19\times 18}{3\times 2}}{\frac{26\times 25\times 24\times 23\times 22\times 21\times 20}{7!}} \simeq 0{,}026$$

De même

$$\mathbb{P}'(C_5) = \frac{\binom{6}{5}\times\binom{20}{2}}{\binom{26}{7}} = \frac{6 \times \frac{20\times 19}{2}}{\binom{26}{7}} \simeq 1{,}7\times 10^{-3}$$

$$\mathbb{P}'(C_6) = \frac{\binom{6}{6}\times\binom{20}{1}}{\binom{26}{7}} = \frac{20}{\binom{26}{7}} \simeq 3{,}0\times 10^{-5}.$$

$$\mathbb{P}'(C) = \mathbb{P}'(C_4) + \mathbb{P}'(C_5) + \mathbb{P}'(C_6)$$

$$\simeq 0{,}028$$