Exercice 6 :

1) a) Soit $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On pose $Y_n = f(Z_n)$.

Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue bornée

$$E[h(\cancel{Y}_n)] = E[\underbrace{h \circ f}_{\text{continue bornée}}(Z_n)]$$

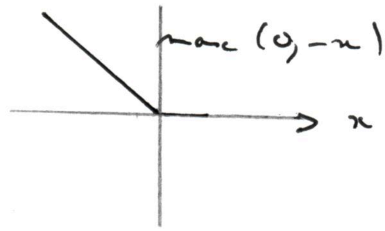
$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} E[h \circ f(Z)]$$

$$= E[h(f(Z))].$$

donc $f(Z_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(Z)$.

b) $Z_n^- = \max(0, -Z_n)$

$= f(Z_n)$ avec $f(x) = \max(0, -x)$.



f est continue

donc Z_n^- converge en loi vers Z^-.

2) a) Soit X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}]$$

$$= \sum_{k\geq 0} e^{itk} \, \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k\geq 0} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

2) b) On admet ici que X admet un moment d'ordre 2.

on a alors $\phi_X'(t) = E[iX e^{itX}]$

$$\phi_X'(0) = E[iX]$$

et $\phi_X''(0) = -E[X^2]$.

$$\phi_X'(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} (i\lambda e^{it})$$

et $\phi_X'(0) = i\lambda$.

d'où $E[X] = \lambda$.

et $\phi_X''(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \left((i\lambda e^{it})^2 + i^2\lambda e^{it} \right)$

$$\phi_X''(0) = -\lambda^2 - \lambda$$

d'où $E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$

et $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda$.

c) $\phi_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it(X_1+\dots+X_n)}\right]$

$= \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(t)$ indépendance

$= \left(\phi_{X_1}(t)\right)^n$ même loi

$= \exp\left(n\lambda\left(e^{it}-1\right)\right)$

donc $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$. avec $\underline{\lambda = 1}$.

$S_n \sim \mathcal{P}(n)$.

3) On pose $Z_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

$\mathbb{E}[Z_n] = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\mathbb{E}[S_n] - n\right) = 0$

$\mathbb{E}[Z_n^2] = \mathrm{Var}(Z_n)$

$= \dfrac{1}{n}\mathrm{Var}(S_n) = \dfrac{n}{n} = 1$ car $S_n \sim \mathcal{P}(n)$.

Si $a>0$, $\mathbb{P}(Z_n^- \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}\left[(Z_n^-)^2\right]}{a^2} \leq \dfrac{\mathbb{E}\left[(Z_n)^2\right]}{a^2}$

$= \dfrac{1}{a^2}$.

4) $Z_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\dfrac{S_n}{n} - m\right)$

avec $S_n = X_1 + \dots + X_n$

$(X_n)_{n\geq 1}$ indépendants, de même loi, de carré intégrable

et $m = E[X_1] = 1$ $\left(X_n \sim \mathcal{P}(1) \right)$.

$\sigma^2 = \text{Var}(X_1) = 1$

Donc d'après le TCL

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

5) $Z_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ ~~avec~~ $S_n \sim \mathcal{P}(n)$.

$$E[Z_n^-] = \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\sqrt{n}} \mathbb{P}(S_n = k)$$

$$= \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} e^{-n}$$

$$= \sqrt{n}\, e^{-n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n^k}{k!} - \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \right) + 1 \right)$$

$$= \sqrt{n}\, e^{-n} \frac{n^n}{n!}$$ (somme télescopique).

6) Si $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$E[Y^-] = \int_{-\infty}^{0} (-y) f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} y f_Y(-y)\, dy = \int_0^{+\infty} y f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} y \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-(e^{-\frac{y^2}{2}}) \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .$$

7) On admet que $E[Z_n^-] \longrightarrow E[Z^-]$

et donc $$\sqrt{n}\, e^{-n} \frac{n^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

soit
$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

soit encore $$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Hors Barème :

(i) Z_n définie par $\begin{cases} \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \\ \mathbb{P}(Z_n = -n) = \frac{1}{n}. \end{cases}$

$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ mais $\mathbb{E}[Z_n^-] = n \times \mathbb{P}(Z_n = -n)$

$= n \times \frac{1}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

(ii) $\mathbb{E}[|X - \min(X,a)|]$

$= \mathbb{E}[(X-a)\mathbb{1}_{\{X \geq a\}} - 0\,\mathbb{1}_{\{X < a\}}]$

$= \mathbb{E}[(X-a)\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}] \leq \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}]$

$\leq \mathbb{E}[(X^2)]^{1/2}\ \mathbb{P}(X \geq a)^{1/2}$ par Cauchy-Schwarz

(iii) L'idée est de considérer $Y_n^a = \min(Z_n^-, a)$

et $Y^a = \min(Z^-, a)$ pour $a > 0$ fixé.

On a : $0 \leq Y_n^a \leq a$.

Du coup Y_n^a est borné donc $\mathbb{E}[Y_n^a] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[Y^a]$.

et $|\mathbb{E}(Z_n^-) - \mathbb{E}[Z^-]|$

$\leq \mathbb{E}[|Z_n^- - Y_n^a|] + |\mathbb{E}[Y_n^a] - \mathbb{E}[Y^a]|$

$+ \mathbb{E}[|Y^a - Z^-|]$

$\underset{\text{(ii) et (3)}}{\leq} \frac{2}{a} + |\mathbb{E}[Y_n^a] - \mathbb{E}[Y^a]|.$

Soit $\varepsilon > 0$,

~~Posons~~ $a_0 = \frac{4}{\varepsilon}$,

$$|\mathbb{E}[Z_n^-] - \mathbb{E}[Z^-]| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\underbrace{\mathbb{E}[Y_n^{a_0}] - \mathbb{E}[Y^{a_0}]}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}|$$

donc $\exists N \geq 0$, si $n \geq N$

$$|\mathbb{E}[Y_n^{a_0}] - \mathbb{E}[Y^{a_0}]| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et si $n \geq N$, on a donc :

$$|\mathbb{E}[Z_n^-] - \mathbb{E}[Z^-]| \leq \varepsilon$$

donc $\mathbb{E}[Z_n^-] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[Z^-]$.