Approximation cinétique discrète de problèmes de lois de conservation avec bord

Vuk Milišić

6 décembre 2001

Résumé

Nous étudions l'approximation cinétique discrète de lois de conservation scalaires quasi-linéaires dans le quart d'espace $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+$. Cette approximation est obtenue par l'introduction de systèmes de type BGK relaxant la loi scalaire. Nous démontrons la convergence des systèmes semi-linéaires vers la loi scalaire. Nous discrétisons ces modèles pour obtenir une gamme de schémas numériques adaptés au problème avec bord. Dans une troisième partie, nous appliquons ces schémas à un certain nombre de cas test numériques.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse porte sur l'étude des lois de conservation avec conditions aux limites par l'approximation cinétique discrète. Au cours de cette étude, nous abordons les aspects théoriques du problème et ses applications numériques. Ces travaux donnent un aperçu de l'utilisation de l'outil cinétique appliqué aux problèmes avec condition aux limites. Nous étudions la loi de conservation scalaire suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+ \\ u(0,x) = u^0(x) \text{ pour } t = 0 \\ u(t,0) = u_b(t) \text{ pour } x = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

qui représente la conservation de la quantité u au cours du temps, sur un domaine semi-borné $\mathbb{R}^+$. La fonction F est appelée flux et est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

De nombreux problèmes conduisent à un modèle de ce type citons par exemple des problèmes de trafic routier, ou encore la construction de semi-conducteurs (modèle de ion-etching).

Il est connu que même pour les problèmes sans bord, en général, il n'y a pas de solution classique (c'est-à-dire régulière). Ceci n'est pas dû au manque de régularité éventuel des données du problème (u^0 pour le problème de Cauchy, et (u_b, u^0) pour le problème avec bord), mais plutôt à la nature non-linéaire de l'équation (1.1). Pour pallier ce manque de régularité, il est nécessaire de considérer la formulation faible du problème. Dans ce cas, il est suffisant que la solution soit bornée. En utilisant cette formulation, le problème de Cauchy est cependant mal posé, en fait, en appliquant la méthode des caractéristiques, on peut exhiber des exemples de non unicité. Il sera donc nécessaire de trouver un moyen qui nous permette de choisir entre toutes les solutions celle qui physiquement a un sens, pour le problème (1.1) il en sera de même.

Pour le problème de Cauchy, dans [28], Kružkov a donné les fondements de la théorie hyperbolique scalaire en étudiant la régularisation parabolique de (1.1) :

$$\begin{cases} \partial_t u^\delta + \partial_x F(u^\delta) = \delta(\partial_{xx} u), \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}, \quad \delta > 0 \\ u(0,x) = u^0(x) \text{ pour } t = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

et a exhibé u l'unique solution vers la quelle les solutions u^δ de ce modèle convergent. Pour cela, il a établi des résultats de stabilité BV qui permettent d'extraire une sous-suite convergente dans L^1_{loc} vers la solution du problème avec $\delta = 0$. Pour montrer que ce modèle fournit l'unique solution physiquement acceptable, l'auteur a montré que celle-ci satisfaisait des inégalités d'entropie.

Suivant cette voie, le problème (1.1) a été pensé comme limite d'une équation dans la quelle étaient présents des termes de diffusion du second ordre. En effet, dans [5] les auteurs on étudié la limite du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u^\delta + \partial_x F(u^\delta) = \delta(\partial_{xx} u), \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+ \\ u(0,x) = u^0(x) \text{ pour } t = 0 \\ u(t,0) = u_b(t) \text{ pour } x = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Dans ce modèle, tant que $\delta > 0$, la condition de type Dirichlet non homogène est respectée par la trace, et la solution u^δ possède une régularité supérieure à celle de l'équation limite ($\delta = 0$).

A cause de la nature hyperbolique du problème, on ne peut pas s'attendre à ce que la trace respecte toujours $u(t,0) = u_b(t)$. En effet, dans certains cas, la solution à l'intérieur du domaine peut "sortir" par le bord et la condition aux limites n'a plus de sens, (il suffit d'imaginer un choc sortant (c'est-à-dire dont la vitesse de propagation est négative)).

Les auteurs ont donc exhibé pour ce problème des conditions de compatibilité de la trace de la solution avec la condition aux limites u_b qui s'écrivent :

$$\max\{\operatorname{sgn}(u(t,0) - u_b(t))(F(u(t,0)) - F(k)) \,:\, k \in I(u_b(t), u(t,0))\} = 0. \tag{1.4}$$

et ont montré la convergence de ce modèle vers (1.1). Ils ont de plus montré le caractère entropique de la solution limite.

Les précédents modèles approchent le problème (1.1) de nature hyperbolique par un problème parabolique d'où le terme diffusif disparaît à la limite. Dans cette thèse, nous utilisons un modèle hyperbolique de type cinétique discret. En effet, nous étudions le système semi-linéaire du premier ordre dépendant d'un paramètre $\epsilon > 0$

$$\begin{cases} \partial_t f_k + \lambda_k \partial_x f_k = \frac{1}{\epsilon}(M_k(u^\epsilon) - f_k) \;\; k \in \{1, \ldots, N\}, \\ f_k(0,x) = M_k(u^0(x)), \;\; t = 0, \\ f_k(t,0) = M_k(u_b(t)), \;\; \forall \lambda_k > 0 \;\; \text{et } x = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

où $u^\epsilon = \sum_k f_k$. Pour relier le problème (1.1) avec le système (1.5), il faut faire quelques hypothèses importantes sur les fonctions M_k qui sont communément appelées Maxwelliennes. On les suppose localement Lipschitziennes et vérifiant les relations de compatibilité suivantes avec l'équation scalaire (2.1) :

$$\begin{cases} \sum_k M_k(u) = u, \\ \sum_k \lambda_k M_k(u) = F(u). \end{cases} \tag{1.6}$$

pour tout réel u. En sommant toutes les équations de (1.5) on obtient, grâce à la première des deux relations précédentes :

$$\partial_t u^\epsilon + \sum_k \lambda_k \partial_x f_k^\epsilon = 0.$$

Pour que le terme source de chacune des équations de (1.5) reste borné quand ϵ tend vers 0 il faut nécessairement que $(f^\epsilon)_\epsilon$ tende vers $M_k(u)$. L'équation limite devient, formellement,

$$\partial_t u + \partial_x \sum_k \lambda_k M_k(u) = 0.$$

A cause de la deuxième relation de (1.6) la limite est l'équation (1.1).

Un exemple de relaxation du problème (1.1) est le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + \lambda^2 \partial_x u = \frac{1}{\epsilon}(F(u) - v) \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme cinétique,

$$\begin{cases} \partial_t f_1 + \lambda \partial_x f_1 = \frac{1}{\epsilon}(M_1(u) - f_1) \\ \partial_t f_2 - \lambda \partial_x f_2 = \frac{1}{\epsilon}(M_2(u) - f_2) \end{cases} \tag{1.7}$$

où $u = f_1 + f_2$ et $v = \lambda(f_1 - f_2)$. Ce modèle est un cas très simple de (1.5) à deux vitesses. Il a d'abord été introduit par S. Jin et Z. Xin pour le problème de Cauchy, dans [27], pour ses propriétés particulières, c'est-à-dire sa simplicité analytique, la pertinence de son interprétation physique, et enfin sa flexibilité numérique. Du point de vue théorique, les solutions faibles et régulières ont été étudiées dans [16] pour un système quasi-linéaire, alors que pour les systèmes BGK, approchant l'équation scalaire on peut se référer à [38] pour le problème de Cauchy.

Le modèle cinétique que nous avons présente est un cas particulier de systèmes de type BGK qui s'écrivent

$$\partial_t f(t,x,\xi) + a(\xi)\partial_t f(t,x,\xi) = \frac{1}{\epsilon}(M(u,\xi) - f(t,x,\xi))$$

avec ξ dans un espace donné Ξ , a une une application de Ξ dans $\mathbb{R}$. Pour ce système, A. Nouri, A. Omrane, and J. P. Vila ont montré dans [43] des propriétés de stabilité de la solution, et ont pu extraire une sous-suite convergente vers la solution de (1.1). Ils n'ont cependant pas pu montrer la consistance avec les relations d'entropie de [5] dans un cas général, mais seulement dans le cas où les flux sont concaves ou convexes.

Dans [48], W.C. Wang et Z. Xin. ont étudié le système relaxé (1.7) muni de la condition aux limites suivante

$$f_1(t,0) + f_2(t,0) = u_b(t) \tag{1.8}$$

pour ce modèle, les auteurs ont démontré la stabilité des solutions, mais la consistance avec les relations d'entropie a été possible seulement sous de fortes restrictions sur les données, c'est-à-dire qu'il y a unicité pour des petites perturbations en norme BV autour d'un état constant u^* non trans-sonique ($F'(u^*) \neq 0$).

Dans [39], ces dernières restrictions ont pu être levées grâce à une condition aux limites différente :

$$f^1(t,0) = M_1(u_b(t)) \tag{1.9}$$

et ainsi les auteurs ont obtenus des résultats complets pour tout type de flux F et pour tout type de données (u_b, u^0) dans $(L^\infty(0,T) \times L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+))$.

Le seul obstacle qui restait est l'extension des résultats de [39] au cas de modèles à plusieurs vitesses, (le modèle relaxé en a seulement deux). Cet obstacle n'est pas sans conséquences, en effet, l'extension des résultats précédents au cas multidimensionnel n'est pas possible directement en utilisant le modèle relaxé, car, en deux dimensions d'espace le modèle qui a le plus petit nombre de vitesses en contient au moins trois.

Dans le chapitre deux de cette thèse, nous présentons la généralisation des résultats de [39] au cas d'un système (1.5) contenant un nombre fini de vitesses quelconque en une dimension d'espace. Nous établissons d'abord des résultats d'existence globale des systèmes semi-linéaires avec bord, puis nous énonçons des théorèmes de stabilité L^∞, L^1 et BV qui permettent d'extraire une sous-suite convergente vers le problème (1.1). La clé de voûte de ce raisonnement repose dans les estimations BV en espace. Dans ces estimations apparaissent certains termes de bord qui étaient contrôlables dans [39] seulement grâce à la nature du système relaxé. Pour une configuration quelconque, nous allons montrer que ce n'est plus nécessaire.

Dans un deuxième temps, on montre comment la condition aux limites

$$f_k^\epsilon(t,0) = M_k(u_b(t)) \quad \forall k \text{ tel que } \lambda_k > 0$$

permet de passer à la limite dans les inégalités d'entropie sans avoir besoin d'estimations BV de la trace. Cette propriété n'a pas été possible à démontrer pour (1.8), la condition de type Dirichlet utilisée dans [48]. Ainsi, il semble que du point de vue des inégalités d'entropie aussi, la condition (1.9) soit la plus simple à manier.

Au cours du chapitre trois de ce mémoire, nous abordons la discrétisation du système (1.5), étendant ainsi les résultats numériques obtenus dans le cas du problème de Cauchy dans [3]. Comme les schémas numériques discrétisent le problème (1.1) il n'y a aucune régularité possible des solutions, ceci nous emmène à utiliser des techniques différentes du chapitre deux. On montre comment construire une discrétisation du système (1.5) stable dans les normes L^∞, L^1 et BV. Toutes les estimations sont obtenues sur les valeurs discrètes des schémas par des démonstrations par récurrence. Une fois établies ces estimations, on peut construire un procédé convergent vers la solution entropique de (1.1). Les résultats étant les mêmes que dans le cas continu, il est cependant intéressant de remarquer qu'ils sont obtenus par des arguments différents. Ainsi, au chapitre deux les estimations BV sont obtenues grâce à l'utilisation des équations de (1.5) sur le bord, alors que dans le chapitre trois elles sont dues à une relation d'entropie discrète sur le bord. Après avoir montré que la solution faible obtenue satisfait (1.1), on montre que les schémas du premier ordre convergent vers l'unique solution entropique. Et on montre comment construire des schémas du second ordre stables et spécifiques au problème avec bord.

Après avoir défini complètement le problème et caractérisé les différentes solutions, nous exposons dans la dernière partie de ce travail, les résultats numériques obtenus à l'aide des schémas cinétiques construits au chapitre deux. Dans un premier temps, nous étudions quelques problèmes classiques en une dimension d'espace pour l'équation de Burgers, puis nous appliquons les modèles cinétiques au cas des systèmes de lois de conservation, en une et en plusieurs dimensions d'espace. Pour montrer l'intérêt du traitement cinétique des conditions aux limites, nous travaillons sur le système de la dynamique des gaz. D'abord, on s'intéresse aux problèmes de Dirichlet non homogène (dans un sens faible que nous préciserons), pour ensuite étendre nos expériences au cas de parois réfléchissantes de type mur solide.

Chapitre 2

Stabilité et convergence du modèle BGK discret

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous approchons une loi de conservation scalaire avec conditions au bord par un système BGK. On considère le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+ \\ u(0,x) = u^0(x) \text{ pour } t = 0, x \geq 0 \\ u(t,0) = u_b(t) \text{ pour } t \geq 0, x = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

la fonction F est $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On ne peut imposer la condition aux limites pour tout $t > 0$, mais seulement lorsqu'elle satisfait une relation de compatibilité avec la trace de la solution du problème et le flux F. Cette condition s'énonce comme suit

$$\max\{\operatorname{sgn}(u(t,0) - u_b(t))(F(u(t,0)) - F(k)) \,:\, k \in I(u_b(t), u(t,0))\} = 0. \tag{2.2}$$

et a été introduite dans [5], dans le cadre de l'approximation par viscosité de (2.1).

En prenant une suite de réels fixés $(\lambda_k)_{1\leq k\leq N}$, considérons le système semi-linéaire du premier ordre dépendant d'un paramètre $\epsilon > 0$

$$\begin{cases} \partial_t f_k + \lambda_k \partial_x f_k = \frac{1}{\epsilon}(M_k(u^\epsilon) - f_k) \;\; k \in \{1, \dots, N\}, \\ f_k(0,x) = M_k(u^0(x)), \;\; t = 0, \\ f_k(t,0) = M_k(u_b(t)), \;\; \forall \lambda_k > 0 \;\; \text{ et } x = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

où $u^\epsilon = \sum_k f_k$. Pour relier le problème (2.1) avec le système (2.3), il faut faire quelques hypothèses importantes sur les fonctions M_k qui sont communément appelées Maxwelliennes. On les suppose localement Lipschitziennes et vérifiant les relations de compatibilité suivantes avec l'équation scalaire (2.1) :

$$\begin{cases} \sum_k M_k(u) = u, \\ \sum_k \lambda_k M_k(u) = F(u). \end{cases} \tag{2.4}$$

pour tout réel u. En additionnant toutes les équations de (2.3) d'abord, puis en additionnant les équations multipliées par λ_k, on obtient la forme dite "rélaxée"du système (2.3)

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon + \partial_x v^\epsilon = 0 \\ \partial_t v^\epsilon + \sum_k {\lambda_k}^2 \partial_x f_k^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(F(u^\epsilon) - v^\epsilon) \end{cases} \tag{2.5}$$

avec $v^\epsilon = \sum_k \lambda_k f_k^\epsilon$. Ce système est obtenu grâce aux relations (2.4). On suppose qu'il existe une limite f telle que

$$f^\epsilon \to f$$

quand ϵ tend vers 0, dans un sens assez fort, disons L^1_{loc}. Alors en posant $u = \sum_k f_k$,

$$u^\epsilon \to u$$

dans la même topologie. Alors pour que le noyau reste défini par passage à la limite il faut que

$$f = M(u)$$

et grâce à la seconde relation de (2.4),

$$v = F(u)$$

dans la première des deux équations de (2.5). Donc, au moins formellement, on peut voir que la limite u est une solution du problème (2.1).

La suite de réels $(\lambda_k)_{1\leq k\leq N}$ est choisie de façon à ce que les Maxwelliennes soient non décroissantes, ce qui garantit, nous allons le voir, tous les résultats de stabilité et de consistance avec l'entropie associée à la loi scalaire (2.1). Par exemple, si les maxwelliennes sont non décroissantes, on peut écrire des relations de compatibilité avec les entropies de Kružkov

$$\begin{cases} |u-c| = \sum_k |M_k(u) - M_k(c)| \\ \\ \operatorname{sgn}(u-c)(F(u)-F(c)) = \sum_k \lambda_k |M_k(u) - M_k(c)|, \end{cases}$$

propriété qui a été utilisée déjà dans [38, 45], pour le problème de Cauchy.

Un exemple de relaxation du problème (2.1) est le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0 \\ \\ \partial_t v + \lambda^2 \partial_x u = \frac{1}{\epsilon}(F(u) - v) \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme cinétique,

$$\begin{cases} \partial_t f_1 + \lambda \partial_x f_1 = \frac{1}{\epsilon}(M_1(u) - f_1) \\ \\ \partial_t f_2 - \lambda \partial_x f_2 = \frac{1}{\epsilon}(M_2(u) - f_2) \end{cases} \tag{2.6}$$

où $u = f_1 + f_2$ et $v = \lambda(f_1 - f_2)$. Ce modèle est un cas très simple de (2.5) en prenant deux vitesses. Il a d'abord été introduit par S. Jin et Z. Xin dans [27] pour ses propriétés particulières, c'est-à-dire sa simplicité analytique, la pertinence de son interprétation physique, et enfin sa flexibilité numérique. Du point de vue théorique, les solutions faibles et régulières ont été étudiées dans [16] pour un système quasi-linéaire, alors que pour les systèmes BGK, approchant l'équation scalaire on peut se référer à [38] pour le problème de Cauchy.

En ce qui concerne les problème avec bord, pour la stabilité des solutions couche limite, voir [42], tandis que pour l'existence de solution régulières le lecteur peut consulter les travaux de Yong dans [51]. Pour le cas des systèmes, une contribution très importante a récemment été apportée par François Bouchut et Florent Berthelin, dans [9], pour le système de la dynamique des gaz isentropique avec bord. Les travaux s'appuient sur la convergence par compacité par compensation grâce aux domaines invariants dans l'espaces des phases. Il est à noter que ces techniques pourraient aussi être appliquées au cas scalaire.

Pour un ensemble de vitesses continu, le cas des solutions faibles a été étudié dans [43] en plusieurs dimensions d'espace, mais la consistance avec les conditions d'entropie sur les traces (2.2) est obtenue seulement pour le cas de flux concaves ou convexes. Dans [48], W.C. Wang et Z. Xin. ont donné une contribution très importante au cas scalaire 1D avec bord dans le cadre des solutions faibles dans $BV \cap L^\infty$. Les auteurs ont étudié le système relaxé présenté précédemment.

Au bord les auteurs ont posé la condition de type Dirichlet

$$u^\epsilon(t,0) = \sum_{k=1}^{2} f_k = u_b(t);$$

mais l'existence et l'unicité sont obtenues seulement pour une petite perturbation d'un état constant u^* non transsonique, (i.e.: $F'(u^*) \neq 0$). La difficulté majeure réside dans l'estimation des traces de v pour la norme BV, estimation qui nécessite de résoudre un problème rétrograde.

Dans [39], R. Natalini et A. Terracina ont étudié le même système, mais avec la condition au bord :

$$f_1(t,0) = M_1(u_b(t))$$

où f_1 est la composante qui se déplace avec une vitesse positive. Dans cet article, ils ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution de (2.1) quand le paramètre ϵ tend vers 0 dans (2.6), sans aucune restriction ni sur les données ni sur les flux. Nous présentons ici une généralisation de cette condition aux limites au cas d'un ensemble quelconque de vitesses.

Les techniques qui ont été utilisées dans [39] ne s'étendent pas au cas d'un modèle qui contient plus de deux vitesses. Pourtant lorsque l'on veut étudier le cas multi-dimensionnel les modèles contiennent au moins trois vitesses, par ailleurs d'un point de vue numérique certains modèles à plusieurs vitesses sont moins diffusifs, et, enfin, tout schéma “flux-splitting” pouvant être écrit comme un schéma cinétique à trois vitesses, (voir [8]), il est intéressant de pouvoir étendre les résultats démontrés dans [39] au cas $N > 2$.

Dans un premier temps nous établissons tous les résultats d'existence et d'unicité des solutions de (2.3) pour un ϵ fixé, c'est à dire que nous étudions d'abord le système relaxant. Pour établir l'existence d'une solution faible, nous adaptons les résultats déjà existants dans [23] pour un système quasi linéaire, sans bord (de Cauchy). Le bord introduit une formule de Duhamel localisée qui varie suivant l'influence des données (condition initiale ou condition au bord). Celle-ci permet d'énoncer un théorème de comparaison qui sert à encadrer la solution par des sur(sous)-solutions. Le théorème d'existence globale suit par un prolongement classique.

Pour établir la convergence du système (2.3) vers une solution du problème (2.1), on a besoin de prouver des résultats de stabilité $L^1(\mathbb{R}_x^+)$ et $BV(\mathbb{R}_x^+)$ pour tout temps t de façon uniforme en ϵ, ce que nous faisons dans une deuxième partie. Les estimations de la variation totale sont véritablement le cœur du problème avec bord dans un cas de distribution de vitesses quelconque. Pour ces démonstrations on se ramène au cas des solutions régulières, pour ensuite revenir au cas général. Pour les solutions régulières, on utilise les équations (2.3) dérivées pour y appliquer un raisonnement du type estimation de l'énergie. Par la formule de Green, on obtient dans les majorants des termes de bord, termes qu'il faut estimer. Toute la difficulté repose dans ces estimations.

Dans [39], pour les établir les auteurs ont dû utiliser la variation totale de la trace en temps. Il est possible de refaire la même démonstration dans le cas de plusieurs vitesses, mais pour les composantes dont les vitesses sont nulles les estimations ne sont pas uniformes en ϵ. Nous montrons comment éviter la dépendance décrite précédemment, et obtenir des estimations uniformes par rapport à ϵ.

Ayant établi les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité à ϵ fixé, les propriétés de compacité des espaces $BV \cap L^1$ dans L^1 permettent de passer à la limite en ϵ. On montre par des arguments classiques (voir [28, 5, 19]) que la somme des composantes de (2.3) tend vers u, une solution faible de l'équation scalaire (2.3).

La solution faible limite u de notre système (2.1) doit être physiquement acceptable, dans le cas scalaire, cela revient à satisfaire des inégalités d'entropie pour toute fonction positive et convexe. Nous mettons en évidence cette consistance, sans utiliser les estimations de variation totale des traces, qui dans [48, 39] étaient indispensables pour obtenir leur compacité. Cette compacité permet de passer à la limite dans les termes de bords des inégalités d'entropie quand ϵ tend vers 0. Par des arguments de convergence L^∞ faible-*, nous montrons qu'il n'est pas nécessaire d'en passer par là.

2.2 Résultats d'existence pour un système semi-linéaire

2.2.1 Théorème d'existence

Considérons le problème avec bord

$$\begin{cases} \partial_t f + \Lambda \partial_x f = \frac{G(f)}{\epsilon} & (t,x) \in \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+ \\ f(0,x) = f^0(x) & x > 0 \\ f_k(t,0) = f_{b,k}(t) \qquad \lambda_k > 0 \quad k = \{1,\ldots,N\} & t > 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

où $f = (f_1, \ldots, f_N) : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^N$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{N}) \in \mathcal{M}^{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}$, la fonction $G(f) = (G_1, \ldots, G_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ étant localement Lipschitzienne , et $f_b = (f_{b,1}, \ldots, f_{b,N})$ $f^0 = (f_1^0, \ldots, f_N^0)$ des vecteurs dont les composantes sont bornées. On définit en plus, les sous-espaces suivants :

$$\Gamma_k^+ = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } x < \lambda_k t\}$$

$$\Gamma_k^- = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } x \geq \lambda_k t\}$$

Définition 2.2.1 *Une fonction $f \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^+)^N$, $T > 0$, est une solution faible du problème avec bord (2.7) si, pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^+)$ et pour tout $k = 1, \ldots, N$, on a*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} \left[f_k \left(\partial_t \phi + \lambda_k \partial_x \phi \right) + \frac{G_k(f)}{\epsilon} \phi \right] \, dx \, dt = 0 \tag{2.8}$$

et, on a consistance avec les données

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \int_0^T |f_k(t,x) - f_{k,b}(t)| dt = 0 && \forall k \ t.q. \ \lambda_k > 0 \\ &\lim_{t \to 0} \int_0^x |f_k(t,x) - f^0(x)| dx = 0 && \forall k \in \{1,\ldots,N\} \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{2.9}$$

Théorème 2.2.1 *Si le noyau de collision G est globalement Lipschitz, et et les données f^0 (resp f_b) sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^+)^N$ (resp $L^\infty(0,T)^N$), alors il existe une unique solution f du problème (2.7) définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^+$, telle que :*

$$\begin{aligned} f \quad &\in L^\infty((0,T); L^\infty(\mathbb{R}^+)^N) \\ &\cap C^0([0,T]; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)^N) \end{aligned}$$

De plus, si $\lambda_k \neq 0$

$$f_k \in C^0([0,+\infty[; L^1(0,T))$$

Le temps d'existence T est celui de qui est donné par la condition au bord.

Preuve : Cette démonstration se compose de quatre parties. D'abord on montre que dans l'espace des fonctions bornées en espace et en temps le procédé de construction d'une solution de (2.7) donne des itérés toujours contenus dans une boule de rayon M.

Pour montrer certaines propriétés de régularité de la solution on montre dans un deuxième temps que le procédé est contractant dans une certaine norme, sur un sous-espace des fonctions bornées. La contraction établie permet grâce au théorème du point fixe de prouver que le procédé de construction donne un unique solution.

Tous les résultats obtenus ainsi sont valables sur un compact en espace. Pour montrer le caractère global des propriétés on montre qu'on peut construire par un procédé d'extraction diagonale une solution qui garde toutes les propriété partout en espace.

On montre ensuite que la solution construite l'est au sens de la définition 2.2.1.

I Notations

Soit J, un compact de $\mathbb{R}^+$ contenant $[0, 2\sigma T]$, où σ est le maximum des modules des vitesses λ_k. On définit W, comme

$$W(T,J) = X(T) \cap Y(T,J) \cap Z(T,J),$$

avec les espaces de Banach suivants

$$X(T) = L^\infty(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^+)^N)$$

$$Z(T,J) = C^0([0,T]; L^1(J)^N)$$

muni des normes

$$||f||_X = \sup_{t\in(0,T)} \sum_{k=1}^N ||f_k(t,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}+)}$$

$$||f||_Z = \sup_{t\in(0,T)} \sum_{k=1}^N ||f_k(t,\cdot)||_{L^1(J)}$$

où J est un compact de $\mathbb{R}_x^+$. Pour la régularité en espace à valeur L^1 en temps on définit

$$Y(T,J) = \{f \in \mathbb{R}^N \quad \text{t.q. } f_k \in C^0(J; L^1(0,T)) \; \forall k \text{ t.q. } \lambda_k \neq 0\}$$

et la semi-norme associée

$$||f||_{Y(T,J)} = \sup_{x\in J} \sum_{\lambda_k \neq 0} ||f_k(\cdot,x)||_{L^1(0,T)}.$$

On pose

$$\begin{cases} \mu_k^\infty = \sup(||f_k^0||_{L^\infty(\mathbb{R}+)}, ||f_{k,b}||_{L^\infty(0,T)}) \\ \mu^\infty = \sum_k \mu_k^\infty \end{cases}$$

et on introduit l'opérateur

$$T_k(f)(t,x) = \begin{cases} T_{k,+}(f)(t,x) := f_{k,b}(t - \frac{x}{\lambda_k}) & +\frac{1}{\epsilon\lambda_k}\int_0^x G_k(f(t - \frac{x-y}{\lambda_k}, y))dy & \text{sur } \Gamma_k^+ \\ T_{k,-}(f)(t,x) := f_k^0(x - \lambda_k t) & +\frac{1}{\epsilon}\int_0^t G_k(f(s, x - \lambda_k(t-s)))ds & \text{sur } \Gamma_k^- \end{cases} \tag{2.10}$$

On suppose que cet opérateur est lipschitz, c'est-à-dire

$$|G_k(f) - G_k(g)| \leq C_k \sum_k |f_k - g_k|.$$

Grâce à l'opérateur T on définit le procédé itératif suivant

$$f^{n+1} = T(f^n)$$

et nous montrons que dans $W(T,J)$, le procédé converge vers une unique solution.

II Borne L^∞

II.1) Pour les composantes à vitesse positive

a) $(t,x) \in \Gamma_k^+$

Parce que la condition au bord est bornée, on a

$$A = |f_{k,b}(t - \frac{x}{\lambda_k})| \leq \mu_k^\infty \quad \forall (t,x) \in \Gamma_k^+$$

Pour la partie collision

$$\begin{aligned} B = \tfrac{1}{\lambda_k}\int_0^x |G_k(f(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y))|dy \quad &= \int_{t-\frac{x}{\lambda_k}}^t |G_k(f(z, x + \lambda_k(z-t)))|dz \\ &\leq \tfrac{C_k}{\epsilon}\int_0^T \textstyle\sum_l ||f_l(z,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}+)}dz \\ &\leq \tfrac{C_k T}{\epsilon}||f||_X. \end{aligned}$$

Or

$$|T_k(f)(t,x)| \leq A + B \leq \mu_k^\infty + \frac{C_k T}{\epsilon}||f||_X$$

b) $(t,x) \in \Gamma_k^-$
De la même façon, on obtient l'expression sur cet intervalle de $(0,T) \times \mathbb{R}^+$.

$$\forall (t,x) \in \Gamma_k^- \qquad |T_k(f)(t,x)| \leq \mu_k^\infty + \frac{C_k T}{\epsilon} ||f||_X$$

parce que pour la partie collision

$$\begin{aligned} \int_0^t G_k(f(s, x-\lambda_k(t-s)))ds &\leq \tfrac{tC_k}{\epsilon} \sup_{s,z} \textstyle\sum_l |f_l|(s,z) \\ &\leq \tfrac{TC_k}{\epsilon} ||f||_{X(T)}. \end{aligned}$$

II.2) Pour les composantes à vitesse négative, on se retrouve dans le cas (II.1 b)

En additionnant sur k toutes les estimations précédentes on peut écrire

$$||T(f)||_X \leq \mu_\infty + \frac{CT}{\epsilon} ||f||_X.$$

où $C = \sum_k C_k$. L'inégalité précédente permet d'avoir

$$||f^{n+1}||_X \leq \mu_\infty + \frac{CT}{\epsilon} ||f^n||_X.$$

Soit $M > \mu_\infty$ et $B_M(T_1)$, la boule de centre 0 et de rayon M dans $X(T_1) = L^\infty(0,T_1; L^\infty(\mathbb{R}^+)^N)$, avec

$$T_1 = \epsilon \frac{(M - \mu_\infty)}{CM}.$$

Si $f \in B_M(T_1)$ alors

$$\begin{aligned} ||f^{n+1}||_X &\leq \mu_\infty + \tfrac{CT_1}{\epsilon} M \\ &\leq M \end{aligned}$$

donc $f^{n+1} \in B_M(T_1)$. On pose $M = \theta \mu_\infty$, avec $\theta > 1$ et on a

$$T_1 = \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{\epsilon}{C}$$

donc on voit que à cause de l'hypothèse de régularité Lipschitz du noyau, le temps où la solution n'explose pas ne dépend pas de la norme des données.
On prend $\mathcal{T}$ tel que $\mathcal{T} < T_1$ et on cherche à estimer $\mathcal{T}$ de manière à obtenir la contraction dans $W(\mathcal{T}, J)$.

III Contraction dans $W(\mathcal{T}, J)$

III.1 $||f^{n+1} - f^n||_{X(\mathcal{T})}$
En décomposant l'espace temps suivant que les caractéristiques partent du bord ou de la condition initiale comme on a fait précédemment, on arrive à établir que

$$|(T_k(f^n) - T_k(f^{n-1}))(t,x)| \leq \frac{C_k \mathcal{T}}{\epsilon} ||f^n - f^{n-1}||_X \quad \forall\, (t,x) \in [0,\mathcal{T}] \times \mathbb{R}^+$$

ce qui donne

$$||f^{n+1} - f^n||_X = ||T(f^n) - T(f^{n-1})||_X \leq \frac{C_k \mathcal{T}}{\epsilon} ||f^n - f^{n-1}||_X$$

III.2 $||f^{n+1} - f^n||_{Z(\mathcal{T},J)}$
On examine

$$I_k(t) = \int_J |T_k(f^n) - T_k(f^{n-1})| dx$$

et on suppose que si $\sigma = \max_k |\lambda_k|$, alors $[0, 2\sigma T] \subset J = [0, x_J]$, de manière à enfermer toutes les caractéristiques partant du point $(0,0)$ dans $(0,T) \times J$.

III.2.1 Variables pour lesquelles $\lambda_k > 0$

Parce que T_k est défini par morceaux $I_k(t)$ se décompose comme suit.

$$\begin{aligned} I_k(t) &= \tfrac{1}{\lambda_k} \int_0^{\lambda_k t} \int_0^x |G_k(f^n) - G_k(f^{n-1})|(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y))dy\ dx \\ &+ \int_{\lambda_k t}^{x_J} \int_0^t |G_k(f^n) - G_k(f^{n-1})|(s, x - \lambda_k(t-s))ds\ dx \end{aligned}$$

Parce que G_k est Lipschitz, on a

$$\begin{aligned} I_k(t) &\leq \tfrac{C_k}{\epsilon} \sum_l \Big(\tfrac{1}{\lambda_k} \int_0^{\lambda_k t} \int_0^x |f_l^n - f_l^{n-1}|(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y))dy\ dx \\ &+ \int_{\lambda_k t}^{x_J} \int_0^t |f_l^n - f_l^{n-1}|(s, x - \lambda_k(t-s))ds\ dx \Big). \end{aligned}$$

Et si on note $\Delta f = \sum_l |f_l^n - f_l^{n-1}|$, alors on a

$$\begin{aligned} I_{k,+}(t) &= \tfrac{1}{\lambda_k} \int_0^{\lambda_k t} \int_0^x \Delta f(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y))dy\ dx \\ &= \tfrac{1}{\lambda_k} \int_0^{\lambda_k t} \int_y^{\lambda_k t} \Delta f(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y))dx\ dy \end{aligned}$$

On pose le changement de variables suivant

$$z = \lambda_k(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}) \quad dz = -dx,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} I_{k,+}(t) &\leq \int_0^{\lambda_k t} \int_y^{\lambda_k t} \Delta f(\tfrac{z}{\lambda_k}, y) \tfrac{dz}{\lambda_k} dy \\ &\leq \int_0^{\lambda_k t} \int_0^z \Delta f(\tfrac{z}{\lambda_k}, y) dy \tfrac{dz}{\lambda_k} \\ &\leq \int_0^t \int_0^{\lambda_k w} \Delta f(w, y) dy\ dw \\ &\leq t \sup_{w \in [0,t]} ||(f^n - f^{n-1})(w, \cdot)||_{L^1(J)^N} \\ &\leq \mathcal{T} ||f^n - f^{n-1}||_{Z(\mathcal{T}, J)} \end{aligned}$$

Pour la partie standard qui vient des caractéristiques venant depuis la condition initiale, on a

$$\begin{aligned} I_{k,-}(t) &= \int_{\lambda_k t}^{x_J} \int_0^t \Delta f(s, x - \lambda_k(t-s))ds\ dx \\ &= \int_0^t \int_{\lambda_k t}^{x_J} \Delta f(s, x - \lambda_k(t-s))dx\ ds \end{aligned}$$

On fait le changement de variables

$$z = x - \lambda_k(t-s) \quad dz = -dx,$$

qui donne

$$\begin{aligned} I_{k,-}(t) &= \int_0^t \int_{\lambda_k s}^{x_J - \lambda_k(t-s)} \Delta f(s, z) dz\ ds \\ &\leq \int_0^t \int_0^{x_J} \Delta f(s, z) dz\ ds \\ &\leq t \sup_{s \in [0, \mathcal{T}]} \int_J \sum_l |f_l^n - f_l^{n-1}|(s, z) dz \\ &\leq \mathcal{T} ||f^n - f^{n-1}||_{Z(\mathcal{T}, J)} \end{aligned}$$

Finalement on a

$$I_k(t) \leq 2 \frac{C_k \mathcal{T}}{\epsilon} ||f^n - f^{n-1}||_{Z(\mathcal{T}, J)}$$

III.2.2 Variables pour lesquelles $\lambda_k \leq 0$
Dans ce cas l'expression $I_k(t)$ s'écrit en un seul bloc

$$\begin{aligned}
I_k(t) &= \int_0^{x_J} \int_0^t |G_k(f^n) - G_k(f^{n-1})|(s, x - \lambda_k(t-s))\, ds\, dx \\
&\leq \tfrac{C_k}{\epsilon} \int_0^t \int_{-\lambda_k(t-s)}^{x_J - \lambda_k(t-s)} \Delta f(s,z)\, dz\, ds \\
&\leq \tfrac{C_k}{\epsilon} \int_0^t \int_0^{x_J - \lambda_k(t-s)} \Delta f(s,z)\, dz\, ds \\
&\leq \tfrac{C_k \mathcal{T}}{\epsilon} \sup_{s\in[0,\mathcal{T}]} ||f^n - f^{n-1}||_{L^1(J)^N} + \tfrac{C_k}{\epsilon} \int_0^t \int_{x_J}^{x_J - \lambda_k(t-s)} \Delta f(s,z)\, dz\, ds \\
&\leq \tfrac{C_k \mathcal{T}}{\epsilon} ||f^n - f^{n-1}||_{Z(\mathcal{T},J)} + \tfrac{C_k|\lambda_k|\mathcal{T}^2}{\epsilon} ||f^n - f^{n-1}||_{L\infty((0,\mathcal{T})\times\mathbb{R}^+)}
\end{aligned}$$

La somme sur toutes les composantes donne le résultat suivant

$$||f^{n+1} - f^n||_{Z(\mathcal{T},J)} \leq 2\frac{C\mathcal{T}}{\epsilon} ||f^n - f^{n-1}||_{Z(\mathcal{T},J)} + \frac{D\mathcal{T}^2}{\epsilon} ||f^n - f^{n-1}||_{X(\mathcal{T})}$$

où $D = \sum_k |\lambda_k| C_k$.

III.3 $||f^{n+1} - f^n||_{Y(\mathcal{T},J)}$
Pour exhiber la contraction dans cet espace, on doit se restreindre aux composantes du vecteur $T(f^n) - T(f^{n-1})$ qui n'ont pas de vitesse nulle. En effet, si on regarde l'exemple suivant

$$\begin{cases} \partial_t \phi = 0 \\ \phi(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

avec $\psi(x)$ une fonction bornée et discontinue, la solution s'écrit $\phi(t,x) = \psi(x)$ pour tout temps t. On n'a aucune chance d'obtenir une continuité quelconque en espace.
Pour se restreindre aux composantes dont la vitesse est non nulle on utilise la semi-norme suivante

$$||f||_{Y(\mathcal{T},J)} = \sup_{x\in J} \sum_{\lambda_k \neq 0} ||f_k(\cdot, x)||_{L^1(0,\mathcal{T})}$$

Et on étudie la contraction par rapport à celle-ci, sachant que les estimation ne permettront de conclure que lorsque on ajoutera la semi-norme aux autres normes (sur X et sur Z).
Dans les estimation dans l'espace $Z(\mathcal{T}, J)$, on a intégré en espace et pris le supremum en temps, ici, on fait le contraire. Donc on est emmené à évaluer

$$I_k(x) = \int_0^{\mathcal{T}} |T_k(f^n) - T_k(f^{n-1})|(t,x) dt$$

Deux cas de figure se présentent

(i) $x \leq \max(\lambda_k, 0) \cdot T$
En intégrant, on découpe T_k en deux définitions car $\{x\} \times (0, \mathcal{T})$ coupe la caractéristique $x = \lambda_k t$

$$\begin{aligned}
I_k(x) &= \int_0^{\frac{x}{\lambda_k}} |T_{k,-}(f^n) - T_{k,-}(f^{n-1})| dt \\
&+ \int_{\frac{x}{\lambda_k}}^{T} |T_{k,+}(f^n) - T_{k,+}(f^{n-1})| dt \\
&\leq \tfrac{C_k}{\epsilon} \int_0^{\frac{x}{\lambda_k}} \int_0^t \Delta f(s, x - \lambda_k(t-s)) ds\, dt \\
&+ \tfrac{C_k}{\epsilon} \tfrac{1}{\lambda_k} \int_{\frac{x}{\lambda_k}}^{T} \int_0^x \Delta f(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y)) dy dt
\end{aligned}$$

La première partie s'écrit

$$\begin{aligned} I_{k,-}(x) &= \int_0^{\frac{x}{\lambda_k}} \int_0^t \Delta f(s, x-\lambda_k(t-s))ds\, dt \\ &= \int_0^{\frac{x}{\lambda_k}} \int_s^{\frac{x}{\lambda_k}} \Delta f(s, x-\lambda_k(t-s))dt\, ds \end{aligned}$$

On utilise le changement de variables suivant

$$z = \tfrac{x-\lambda_k(t-s)}{\lambda_k} \quad dz = -dt,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} I_{k,-}(x) &= \int_0^{\frac{x}{\lambda_k}} \int_s^{\frac{x}{\lambda_k}} \Delta f(s, \lambda_k z)dz\, ds \\ &\leq \int_0^{\frac{x}{\lambda_k}} \int_0^t \Delta f(s, \lambda_k z)ds\, dz \\ &\leq \frac{x}{\lambda_k} \sup_{v\in[0,x]} \|(f^n - f^{n-1})(\cdot, v)\|_{L^1(0,\mathcal{T})^N} \\ &\leq \mathcal{T}\|f^n - f^{n-1}\|_{Y(\mathcal{T},J)} + \mathcal{T}^2\|f^n - f^{n-1}\|_{X(\mathcal{T})} \end{aligned}$$

cette dernière inégalité est due au fait que $x \leq \lambda_k\mathcal{T}$. Le dernier terme vient des composantes dont la vitesse est nulle. De la même façon

$$\begin{aligned} I_{k,+}(x) &= \tfrac{1}{\lambda_k} \int_{\frac{x}{\lambda_k}}^{\mathcal{T}} \int_0^x \Delta f(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y))dydt \\ &\leq \mathcal{T}\|f^n - f^{n-1}\|_{Y(\mathcal{T},J)} + \mathcal{T}^2\|f^n - f^{n-1}\|_{X(\mathcal{T})} \end{aligned}$$

Il reste alors le cas

(ii) $x > \max(\lambda_k, 0)\cdot\mathcal{T}$

On suppose que $\lambda_k < 0$, et toujours avec les mêmes notations on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \Delta f(s, x-\lambda_k(t-s))\, ds\, dt = \tfrac{1}{|\lambda_k|} \int_0^{\mathcal{T}} \int_x^{x-\lambda_k t} \Delta f(t - \tfrac{x-z}{\lambda_k}, z)\, dz\, dt \\ &= \tfrac{1}{|\lambda_k|} \int_0^{\mathcal{T}} \int_x^{x-\lambda_k\mathcal{T}} \Delta f(t - \tfrac{x-z}{\lambda_k}, z)\mathbb{1}_{[z<x-\lambda_k t]}\, dz\, dt \\ &= \tfrac{1}{|\lambda_k|} \int_x^{x-\lambda_k\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \Delta f(t - \tfrac{x-z}{\lambda_k}, z)\mathbb{1}_{[\frac{z-x}{-\lambda_k}<t]}\, dz\, dt \\ &= \tfrac{1}{|\lambda_k|} \int_x^{x-\lambda_k\mathcal{T}} \int_{-\frac{(x-z)}{\lambda_k}}^{\mathcal{T}-\frac{(x-z)}{\lambda_k}} \Delta f(\tau, z)\mathbb{1}_{\tau>0} d\tau\, dz \\ &\leq \tfrac{1}{|\lambda_k|} \int_x^{x-\lambda_k\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \Delta f d\tau dz \\ &\leq \mathcal{T} \sup_{z\in J} \int_0^{\mathcal{T}} \Delta f(\tau, z)\, d\tau + \mathcal{T} \sup_{z\notin J} \int_0^{\mathcal{T}} \Delta f(\tau, z) d\tau \\ &\leq \mathcal{T}\|f^n - f^{n-1}\|_{Y(\mathcal{T},J)} + 2\mathcal{T}^2\|f^n - f^{n-1}\|_{X(\mathcal{T})} \end{aligned}$$

Le coefficient 2 devant le dernier terme vient de la prise en compte des composantes dont la vitesse est nulle qu'on ne peut pas utiliser dans la norme sur Y. Pour une vitesse λ_k positive, le même résultat s'obtient suivant le calcul précédent.

Les considérations précédentes nous emmènent à écrire que

$$\|f^{n+1} - f^n\|_{Y(\mathcal{T},J)} \leq C(\frac{\mathcal{T}}{\epsilon}\|f^n - f^{n-1}\|_{Y(\mathcal{T},J)} + \frac{2\mathcal{T}^2}{\epsilon}\|f^n - f^{n-1}\|_{X(\mathcal{T})})$$

Ces quatre points permettent de conclure que

$$\|f^{n+1} - f^n\|_{W(\mathcal{T},J)} \leq 4\min\left(\frac{C\mathcal{T}}{\epsilon}, \frac{D+C}{\epsilon}\mathcal{T}^2\right)\|f^n - f^{n-1}\|_{W(\mathcal{T},J)}. \quad (2.11)$$

Pour que la série $\sum_{n=1}^{\infty} ||f^n - f^{n-1}||_{W(\mathcal{T},J)}$ soit convergente, il suffit que la relation (2.11) soit contractante, c'est-à-dire

$$\mathcal{T} \leq \min\left(T_1, \frac{\epsilon}{4C}, \sqrt{\frac{\epsilon}{4(D+C)}}\right).$$

Donc pour tout compact J, $\sum_n f^n - f^{n-1}$ converge absolument dans $W(T_2, J)$. Donc il existe une limite dans $W(\mathcal{T}, J)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f^n = f = T(f) \tag{2.12}$$

Comme précédemment, on voit que le temps maximal ne dépend ni des données initiales et ni de celles du bord. Ceci permet de prolonger le temps d'existence tant que la condition aux limites est définie. Ce résultat est dû à la régularité Lipschitz du terme de collision, et n'est plus valable lorsque le noyau G est seulement localement Lipschitz. Donc

$$\mathcal{T} = T.$$

IV Régularité globale de la solution et consistance avec les données

Donc on peut résumer le résultat précédent par la formule :

$$\forall J \;\; \exists !\, f_J \in W(T, J) \text{ t.q. } T(f_J) = f_J$$

On définit maintenant une suite croissante de compacts

$$J_l = [0, 2\sigma l T]$$

et

$$f(t,x) = f_l(t,x) \quad \text{si } x \in J_l$$

et on montre que f ainsi définie appartient à $C^0([0,T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+))$.

IV.1 Unicité de la définition

Si $l > m$ alors $W(T, J_l) \subset W(T, J_m)$ car

$$\begin{cases} C^0([0,T]; L^1(J_l)^N) \subset C^0([0,T]; L^1(J_m)^N) \\ \\ C^0(J_l; L^1(0,T)^N) \subset C^0(J_m; L^1(0,T)^N) \end{cases}$$

Dans la suite, on note $f_{l/m}$ la restriction de f_l sur le compact J_m. Grâce à la relation (2.12), on peut écrire

$$f_{\,l/m} = T(f_l)_{/m} = T(f_{l/m})$$

Si $f_{l/m} \neq f_m$ alors il y aurait dans $W(T, J_k)$ d eux fonctions à satisfaire (2.12), ce qui est en contradiction avec le résultat d'unicité. Donc,

$$f_{l/m} = f_m$$

IV.2 $f_k \in C^0(]0; +\infty[; L^1(0,T))$ $\forall k$ t.q. $\lambda_k \neq 0$? Dans cette partie, dans un souci de clarté nous travaillons seulement sur les composantes dont la vitesse n'est pas nulle, donc, on omet l'indice k On veut montrer que

$$\forall x_0 \; \forall \delta \; \exists \eta_\delta \text{ t.q. } \forall x \in B(x_0, \eta_\delta) \implies ||f(\cdot,x) - f(\cdot,x_0)||_{L^1(0,T)^N}$$

Or, pour toute boule autour de x_0 dans la métrique de $\mathbb{R}$ on peut trouver un compact J_{m_0} la contenant. Donc,

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \;\; f(t,x) = f_{m_0}(t,x) \;\; \forall t$$

or

$$f_{m_0} \in C^0(J_{m_0}; L^1(0,T)^N)$$

donc

$$||f(\cdot,x) - f(\cdot,x_0)||_{L^1(0,T)^N} = ||f_{m_0}(\cdot,x) - f_{m_0}(\cdot,x_0)||_{L^1(0,T)^N} \leq \epsilon$$

Pour la continuité en $x = 0$, pour les caractéristique rentrantes, on montre ci dessous la consistance avec les données.

IV.3 $f \in C^0([0,T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+))$?
Il faut montrer que

$$\forall K \text{ compact } \forall t_0 > 0 \; \forall \delta \; \exists \eta_\delta \text{ t.q. } \forall t \in B(t_0, \delta) \implies ||f(t,\cdot) - f(t_0,\cdot)||_{L^1(K)} \leq \delta$$

Or pour tout compact K il existe un compact J_{m_0} tel que $K \subset J_{m_0}$, donc sur $K \times (0,T)$

$$f(t,x) = f_{m_0}(t,x)$$

mais

$$f_{m_0} \in C^0([0,T]; L^1(J_{m_0})) \subset C^0([0,T]; L^1(K))$$

donc

$$||f(t,\cdot) - f(t_0,\cdot)||_{L^1(K)} = ||f_{m_0}(t,\cdot) - f_{m_0}(t_0,\cdot)||_{L^1(K)} \leq \delta.$$

On a montré la première partie de l'énoncé. Reste à vérifier que pour les caractéristiques rentrantes, on ait consistance entre la trace et les condition aux limites imposées, et consistance pour les conditions initiales quand on s'approche de $t = 0$.

IV.4 Conditions aux limites
On se place dans un voisinage de $(t,x) = (0,T) \times \{0\}$

$$\begin{aligned}
I_k(x) &= \int_0^T |f_k(t,x) - f_{k,b}(t)| dt \\
&= \int_0^{\frac{x}{\lambda_k}} |f_k(t,x) - f_{k,b}(t)| dt + \int_{\frac{x}{\lambda_k}}^T |f_k(t,x) - f_{k,b}(t)| dt \\
&\leq \frac{x}{\lambda_k}(||f||_X + \mu_k^\infty) \\
&+ \int_{\frac{x}{\lambda_k}}^T |f_k(t,x) - f_{k,b}(t - \tfrac{x}{\lambda_k})| + \int_{\frac{x}{\lambda_k}}^T |f_{k,b}(t - \tfrac{x}{\lambda_k}) - f_{k,b}(t)| dt
\end{aligned}$$

le dernier terme disparaît grâce à la continuité de l'opérateur translation sur les fonction de module intégrable. Utilisant la relation (2.12) on a par ailleurs

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{x}{\lambda_k}}^T |f_k(t,x) - f_{k,b}(t - \tfrac{x}{\lambda_k})| dt &= \frac{1}{\lambda_k} \int_{\frac{x}{\lambda_k}}^T \int_0^x |G_k(f)|(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y) dy dt \\
&= \frac{1}{\lambda_k} \int_0^x \int_{\frac{x}{\lambda_k}}^T |G_k(f)|(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y) dt dy
\end{aligned}$$

en utilisant

$$z = t - \frac{x-y}{\lambda_k} \quad dz = dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_k} \int_0^x \int_{\frac{x}{\lambda_k}}^T |G_k(f)|(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y) dt dy &= \frac{1}{\lambda_k} \int_0^x \int_{\frac{y}{\lambda_k}}^{T - \frac{x-y}{\lambda_k}} |G_k(f)|(z,y) dz dy \\
&\leq \frac{1}{\lambda_k} \int_0^x \int_0^T |G_k(f)|(z,y) dz dy \\
&\leq \frac{C_k T x}{\epsilon \lambda_k} \sup_{y \in [0,x], z \in [0,T]} |f(z,y)| \\
&\leq \frac{C_k T x}{\epsilon \lambda_k} ||f||_{X(T)}
\end{aligned}$$

On a donc la propriété suivante

$$\lim_{x \to 0} \int_0^T |f_k(t,x) - f_{k,b}(t)| dt = 0$$

ce qui démontre la consistance avec les condition aux limites et la continuité de la solution en $x = 0$, pour les caractéristiques rentrantes.

IV.5 Conditions initiales

Pour toutes les composantes on écrit

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_k t}^{x_J} |f_k(t,x) - f_k^0(x-\lambda_k t)|dx &\leq \int_{\lambda_k t}^{x_J} \int_0^t |G_k(f(s,x-\lambda_k(t-s)))|ds\, dx \\
&\leq \int_0^t \int_{\lambda_k t}^{x_J} |G_k(f(s,x-\lambda_k(t-s)))|dx\, ds \\
&\leq \int_0^t \int_{x_J-\lambda_k(t-s)}^{x_J} |G_k(f(s,z))|dz\, ds \\
&\leq \int_0^t \int_{x_J-\lambda_k(t-s)}^{x_J} |G_k(f(s,z))|dz\, ds \\
&\leq \frac{C_k}{\epsilon} \int_0^t \int_0^{x_J} \sum_l |f(s,z)|dzds \\
&\leq \frac{C_k t}{\epsilon} \sup_{s\in[0,T]} ||f||_{L^1(J)^N} \\
&\leq \frac{C_k t}{\epsilon} ||f||_{Z(T,J)}
\end{aligned}$$

Comme précédemment,

$$\lim_{t\to 0} \int_0^{x_J} |f_k(t,x) - f_k^0(x)|dx = 0$$

Parce que $C^0(\mathbb{R}_x^+; L^1(0,T)^N)$ est contenu dans l'espace $C^0(\mathbb{R}_x^+; \mathcal{D}'(0,T)^N)$, on peut calculer maintenant la dérivée temporelle au sens des distributions en temps $\mathcal{D}'(0,T)^N$:

$$\lim_{h\to 0} < \frac{f_k(t,x+h) - f_k(t,x)}{h}, \phi(t) >_{\mathcal{D}',\mathcal{D}((0,T))} =$$

$$< \frac{T_k(f)}{\lambda_k}, \phi'(t) >_{\mathcal{D}',\mathcal{D}((0,T))} + < \frac{G_k(f)}{\lambda_k}, \phi(t) >_{\mathcal{D}',\mathcal{D}((0,T))}$$

Ce résultat s'obtient en utilisant Fubini, et en décomposant l'opérateur sur les sous-domaines Γ_k^+ et Γ_k^-, ce qui termine la preuve.

$\diamondsuit$

Proposition 2.2.1 *Si une fonction s'écrit comme*

$$\begin{aligned}
g(t,x) &= \left[a(t-\tfrac{x}{\lambda}) + \int_0^{\frac{x}{\lambda}} b(t-s, x-\lambda s)ds\right] 1\!\!1_{x\leq\lambda t, \lambda>0} \\
&+ \left[c(x-\lambda t) + \int_0^t b(t-s,x-\lambda s)ds\right] 1\!\!1_{x>\lambda t}
\end{aligned}$$

où a, b et c sont des fonctions bornées, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^y [g]_+ &\leq \max(\lambda,0) \int_0^t [a]_+(s)ds + \int_0^{y+|\lambda|t} [c]_+(x)dx \\
&+ \int_0^t \int_0^{y+|\lambda|(t-\tau)} [b]_+(\tau,z)\, dz\, d\tau
\end{aligned}$$

Preuve :

* $\lambda > 0$

Supposons dans un premier temps que $y \leq \lambda t$ alors

$$\begin{aligned}
d(t,y) = \int_0^y [g]_+(t,x)\, dx &\leq \int_0^y [a]_+(t-\tfrac{x}{\lambda})dx + \int_0^y \int_0^{\frac{x}{\lambda}} [b]_+(t-s,x-\lambda s)dsdx \\
&\leq \lambda \int_{t-\frac{y}{\lambda}}^t [a]_+(z)dz + \int_{t-\frac{y}{\lambda}}^t \int_0^{y-\lambda(t-\tau)} [b]_+(\tau,z)\, dz\, d\tau
\end{aligned}$$

ceci s'obtient en posant le changement de variables suivant

$$\theta(s,x) = \begin{cases} \tau = t-s \\ z = x-\lambda_k s \end{cases}$$

Maintenant, si $y > \lambda t$ alors on appelle

$$e(t,y) = \int_{\lambda t}^{y}[g]_+(t,x)dx \quad \leq \int_{\lambda t}^{y}[c(x-\lambda t)]_+dx$$
$$+ \int_{\lambda t}^{y}\int_0^t[b]_+(t-s,x-\lambda s)dsdx$$

Grâce au même changement de variables que précédemment, on a

$$e(t,y) \leq \int_0^{y-\lambda t}[c]_+(z)\;dz + \int_0^t\int_{\lambda t}^{y-\lambda(t-\tau)}[b]_+(\tau,z)\;dz\;d\tau$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^y[g]_+dx \quad & \leq d(t,\lambda t) + e(t,y)\\ & \leq \lambda\int_0^t[a]_+(s)ds + \int_0^t\int_0^{\lambda\tau}[b]_+(\tau,z)\;dz\;d\tau\\ & + \int_0^{y-\lambda t}[c]_+(z)\;dz + \int_0^t\int_{\lambda t}^{y-\lambda(t-\tau)}[b]_+(\tau,z)\;dz\;d\tau\\ & \leq \lambda\int_0^t[a]_+(s)ds + \int_0^{y-\lambda t}[c]_+(z)\;dz + \int_0^t\int_0^{y-\lambda(t-\tau)}[b]_+(\tau,z)\;dz\;d\tau\end{aligned}$$

* Si $\lambda \leq 0$

Dans ce cas, on écrit

$$g(t,x) = c(x-\lambda t) + \int_0^t b(t-s,x-\lambda s)ds$$

ce qui, après intégration, donne

$$\int_0^y[g]_+dx \leq \int_{-\lambda t}^{y-\lambda t}[c]_+(z)dz + \int_0^t\int_{-\lambda(t-\tau)}^{y-\lambda(t-\tau)}[b]_+(\tau,y)d\tau\;dz$$

expression qui se majore facilement par

$$\int_0^y[g]_+dx \leq \int_0^{y-\lambda t}[c]_+(z)dz + \int_0^t\int_0^{y-\lambda(t-\tau)}[b]_+(\tau,y)d\tau\;dz$$

résultat qui lui même est inférieur à la majoration annoncée.

$\diamondsuit$

2.2.2 Théorème de comparaison

Utilisant les résultats précédents, et afin de démontrer que la solution reste bornée pour tout temps, nous avons besoin de redémontrer le théorème suivant (voir [23]). Rappelons tout d'abord :

Définition 2.2.2 *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^N$. Une fonction $G : \Omega \to \mathbb{R}^N$ est quasi-monotone (non-décroissante) si chaque élément G_k de G est non-décroissant par rapport à u_j pour $j \neq i$.*

Théorème 2.2.2 *Soit f et $\overline{f}$ deux solutions du problème (2.7) dans $[0,T]\times\mathbb{R}^+$ avec les données (f^0, f_b) et $(\overline{f}^0, \overline{f}_b)$ respectivement. Soit Q un pavé de $\mathbb{R}^N$ d'intérieur non vide tel que*

(i) G quasi-monotone sur Q

(ii) On suppose en plus que

$$f, \overline{f} \in Q \text{ p.p. dans } [0,T]\times\mathbb{R}^+_x$$

Si pour tout k, $f_{b,k}(t) \leq \overline{f}_{b,k}(t)$ pour presque tout $t \in [0,T]$ et si $f^0_k(x) \leq \overline{f}^0_k(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^+$ alors pour presque tout $(x,t) \in [0,T]\times\mathbb{R}^+_x$

$$f_k(x,t) \leq \overline{f}_k(x,t).$$

Le vecteur G est quasi-monotone sur le pavé Q donc il existe M une constante de Lipschitz telle que

$$\sum_k |G_k(f) - G_k(h)| \leq M \sum_k |f_k - h_k|$$

Lemme 2.2.1 *Dans les hypothèses du théorème 2.2.2, pour tout intervalle* $(0,\beta)$ *et pour presque tout* $t \in (0,T)$, *on a*

$$\begin{aligned}\sum_k \int_0^\beta \quad [f_k(t,x) - \overline{f}_k(t,x)]_+ dx &\leq C e^{tM} \sum_k \int_0^{\beta+\sigma t} [f_k(0,x) - \overline{f}_k(0,x)]_+ dx \\ &+ \sum_{\lambda_k>0} \lambda_k \int_0^t [f_k(s,0) - \overline{f}_k(s,0)]_+ ds \\ &+ M \sum_k \int_0^t \int_0^s [f_k(s,0) - \overline{f}_k(s,0)]_+ e^{M(t-s)} ds\end{aligned} \tag{2.13}$$

où $\sigma = \max_k |\lambda_k|$.

Preuve : Par la formule de Duhamel on a

$$\begin{aligned} f_k(t,x) &= \left[f_k^0(x - \lambda_k t) + \int_0^t G_k(f)(s, x - \lambda_k(t-s)) ds \right] \mathbb{1}_{[x>\lambda_k t]} \\ &+ \left[f_b(t - \tfrac{x}{\lambda_k}) + \int_0^{\frac{x}{\lambda_k}} G_k(f)(t - \tfrac{x-y}{\lambda_k}, y)\, dy \right] \mathbb{1}_{[x<\lambda_k t, \lambda_k>0]} \end{aligned}$$

Grâce à la proposition 2.2.1, on arrive à montrer que si

$$\begin{cases} \sigma = \max_k |\lambda_k| \\ w = f - \overline{f}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^\beta [w_k]_+(t,x) dx &\leq \int_0^{\beta+\sigma t} [w_k^0(x)]_+ dx + \lambda_k \int_0^t [w_{b,k}(s)]_+ ds \\ &+ \int_0^t \int_0^{\beta+\sigma(t-s)} [G_k(f) - G_k(\overline{f})]_+(s,y)\, dy\, ds \end{aligned}$$

En utilisant la quasi-monotonie de G sur Q on obtient :

$$\sum_k H(f_k - \overline{f}_k)(G_k(f) - G_k(\overline{f})) \leq M \sum_k [f_k - \overline{f}_k]_+$$

et alors

$$\mu^+(t) \leq \mu^+(0) + \gamma(t) + M \int_0^t \mu^+(s) ds$$

avec

$$\begin{cases} \gamma(t) = \sum_k \int_0^t [f_{b,k}(s) - \overline{f}_{b,k}(s)]_+ ds \\ \mu^+(s) = \int_0^{\beta+\sigma(t-s)} \sum_k [w]_+ dx \end{cases}$$

Par Gronwall, on a alors :

$$\begin{aligned} \mu^+(t) &\leq \mu^+(0) e^{Mt} + \int_0^t \gamma'(s) e^{M(t-s)} ds \\ &\leq \mu^+(0) e^{Mt} + [\gamma(s) e^{M(t-s)}]_0^t + M \int_0^t \gamma(s) e^{M(t-s)} ds \\ &\leq \mu^+(0) e^{Mt} + \gamma(t) + M \int_0^t \gamma(s) e^{M(t-s)} ds \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Preuve du théorème 2.2.2 : L'estimation (2.13) montre que si

$$f_k^0(x) \leq \overline{f}_k^0(x) \ \ \forall k = \{1, \dots, N\} \ \text{ p.p. } x$$

et

$$f_{b,k}(t) \leq \overline{f}_{b,k}(t) \ \text{ si } \lambda_k > 0 \ \text{ p.p. } t$$

alors la même inégalité a lieu sur tout le domaine de dépendance. $\diamondsuit$

2.3 Stabilité des solutions du système BGK discret

Dans la section précédente, on a étudié un système semi-linéaire, avec un terme source quasi-monotone. A partir d'ici, on s'intéresse plus précisément au problème (2.3), c'est-à-dire qu'on utilise vraiment toutes les propriétés des Maxwelliennes, et des données, pour établir des résultats plus forts.

2.3.1 Hypothèses

Nous étudions donc le système :

$$\begin{cases} \partial_t f_k + \lambda_k \partial_x f_k = \frac{1}{\epsilon}(M_k(u^\epsilon) - f_k) \;\; k \in \{1, \dots, N\}, \\ f_k(0,x) = M_k(u^0(x)), \;\; t = 0, \\ f_k(t,0) = M_k(u_b(t)), \;\; \forall \lambda_k > 0 \quad \text{et } x = 0 \end{cases}$$

muni de données

$$\begin{cases} u_b \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+) \\ u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}_x^+) \end{cases} \tag{2.14}$$

et appelons

$$\mu = \max(||u^0||_{L^\infty(\mathbb{R}_x^+)}, ||u_b||_{L^\infty(\mathbb{R}_t^+)})$$

On suppose que les maxwelliennes sont monotones non décroissantes (**MND**) c'est-à-dire

$$M_k'(u) \geq 0 \;\; u \in I \;\; \forall k = \{1, \dots, N\} \tag{2.15}$$

où $I = [-\mu, \mu]$. Si $Q_k(f) = M_k(u) - f_k$, alors $\frac{\partial Q_k}{\partial f_l} = M_k'(u)$ si $l \neq k$ ce qui confirme que la propriété **MND** implique la quasimonotonie du terme source dans (2.1). De plus, on suppose que ces fonctions satisfont

$$\begin{cases} \sum_k M_k(u) = u, \\ \sum_k \lambda_k M_k(u) = F(u). \end{cases}$$

pour que le système (2.3) soit compatible avec le problème mixte (2.1).

2.3.2 Stabilité L^∞ et existence globale

Théorème 2.3.1 *Supposons que les données satisfassent (2.14), et les maxwelliennes soient* **MND** *sur l'intervalle $I = \{u \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |u| \leq \mu\}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une unique solution $f^\epsilon \in L^\infty((\mathbb{R}^+)^2)^N \cap C^0([0,\infty[_t; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_x^+))^N \cap C^0([0;+\infty[_x; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t^+)^N)$ pour le problème (2.3). De plus on a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} &M_k(-\mu) \leq f_k^\epsilon \leq M_k(\mu) \quad k = 1, \dots, N \\ &||u||_{L^\infty(\mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_t^+)} \leq \mu \end{aligned} \tag{2.16}$$

Preuve : Posons

$$M_k^\#(u) = \begin{cases} M_k(-\mu) & \text{si} \quad u < -\mu \\ M_k(u) & \quad |u| \leq \mu \\ M_k(\mu) & \quad u > \mu \end{cases} \tag{2.17}$$

pour $k = 1, \dots, N$.

Par simplicité omettons l'indice ϵ. Soit

$$T^\delta = \sup_T\{T \geq 0 \ \text{ t.q. } \ |u^\#(x,t)| \leq \mu + \delta/2 \ \text{ p.p. dans } (0,T) \times \mathbb{R}^+\}$$

où $u^\# = \sum_k f_k^\#$. Clairement $T^\delta > 0$, d'après le théorème d'existence 2.2.1. De plus suivant la définition des $M_k^\#$, ces fonctions sont **MND** sur tout $\mathbb{R}_u$. Alors le système (2.3) avec $M_k^\#$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.2.2, en particulier le terme de collision est quasi-monotone dans la bande $\mathbb{R}^+ \times (0, T^\delta)$ c'est-à-dire vérifie la condition (i) du théorème 2.2.2.

Considérons maintenant le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot{p}_k = \frac{1}{\epsilon}(M_k^\#(v) - p_k) \\ \\ p_k(0) = p_{0,k} \end{cases} \quad k = 1, \ldots, N$$

pour $v = \sum_k p_k$, si $|v(0)| \leq \mu$, alors la solution explicite est donnée par

$$v(t) = v(0) = \sum_k p_{0,k}$$

Soit $p^\pm$ la solution correspondant aux données $p_{0,k}^\pm = M_k(\pm\mu)$ et soit $v^\pm = \sum_k p_k^\pm$. Alors

$$v^\pm(t) = v^\pm(0) = \sum_k M_k(\pm\mu) = \pm\mu$$

et $p^\pm(t) = M_k(\pm\mu)$ pour tout $k = 1, \ldots, N$. Donc on applique le théorème 2.2.2 pour obtenir par comparaison

$$M_k(-\mu) \leq f^\# \leq M_k(\mu) \ \ k = 1, \ldots, N$$

et

$$|u^\#(t,x)| \leq \mu$$

pour tout $(t,x) \in ([0, T^\delta] \times \mathbb{R}^+)$. Alors, par des arguments standards de prolongement $T^\delta = +\infty$ et les deux derniers encadrements valent pour tout $\mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_t^+$ et à cause de la borne obtenue sur $u^\#$ on a $M = M^\#$. Alors, on obtient les estimations (2.16) et l'existence globale pour le problème cinétique de départ. $\diamondsuit$

2.3.3 Stabilité $L^1(\mathbb{R}^+)$

Nous redémontrons une version du lemme de Gronwall particulière

Lemme 2.3.1 *Soient u, v et A trois fonction positives définies sur un intervalle $[a,b]$, $a < b$, avec A dérivable sur $[a,b]$, alors si*

$$u(t) \leq A(t) + \int_a^t u(s)v(s)\, ds \tag{2.18}$$

on a

$$u(t) \leq A(t) + \int_a^t v(\tau) e^{-\int_\tau^t v(s)ds} A(\tau) d\tau$$

pour tout $t \in [a,b]$

Preuve : Si $h(t)$ représente le membre de droite de (2.18), on a

$$h'(t) = A'(t) + u(t)v(t)$$

Comme par hypothèse, $u(t) \leq h(t)$ et $v(t) \geq 0$, alors on a

$$h'(t) \leq A'(t) + h(t)v(t) \tag{2.19}$$

On pose

$$C(t) = h(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} - \int_a^t e^{-\int_a^\tau v(s)ds} A'(\tau) d\tau$$

et on dérive, ce qui donne

$$C'(t) = [h'(t) - A'(t) - h(t)v(t)]\, e^{-\int_a^t v(s)ds} \leq 0$$

grâce à l'inégalité (2.19). Puis, on voit que $C(t) \leq A(a)$ car pour tout $t \in [a,b]$, car $C(a) = h(a) = A(a)$. Donc on a

$$h(t) \leq e^{\int_a^t v(s)ds} \left[A(a) + \int_a^t e^{-\int_a^\tau v(s)ds} A'(\tau) d\tau \right]$$

Par intégration par parties on obtient

$$\int_a^t e^{-\int_a^\tau v(s)ds} A'(\tau) d\tau = \left[e^{-\int_a^\tau v(s)ds} A(\tau) \right]_a^t + \int_a^t v(\tau) e^{-\int_a^\tau v(s)ds} A(\tau) d\tau$$

Le lemme résulte de cette dernière intégration car

$$\begin{aligned} u(t) \leq h(t) \quad &\leq e^{\int_a^t v(s)ds} [A(a) + e^{-\int_a^t v(s)ds} A(t) - A(a) + \textstyle\int_a^t v(\tau) e^{-\int_a^\tau v(s)ds} A(\tau) d\tau] \\ &\leq A(t) + \textstyle\int_a^t v(\tau) e^{-\int_\tau^t v(s)ds} A(\tau) d\tau \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve. $\diamondsuit$

A l'aide de la formule de Duhamel déjà utilisée précédemment nous pouvons montrer le théorème suivant :

Théorème 2.3.2 *Soit f le vecteur solution du système (2.3) avec comme données $(u^0(x), u_b(t))$ et $\overline{f}$ un autre vecteur solution du système (2.3) mais pour des données $(\overline{u}^0(x), \overline{u}_b(t))$, pour un même ϵ fixé alors pour tout $K \in \mathbb{R}^+$*

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^K \sum_{k=1}^N [f_k^\epsilon(x,t) - \overline{f_k^\epsilon}(x,t)]_+ dx \leq 2 \Big(&\textstyle\int_0^{K+\sigma t} [u^0(x) - \overline{u}^0(x)]_+ dx \\ &+ \textstyle\sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k \int_0^t [M_k(u_b(\tau)) - M_k(\overline{u}_b(\tau))]_+ d\tau \Big) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Preuve : La formule de Duhamel, obtenue grâce à (2.12), obtenue dans la partie existence locale peut s'écrire sous une forme plus explicite

$$\begin{aligned} f_k(t,x) \quad &= \left[f_k^0(x - \lambda_k t) e^{-t/\epsilon} + \tfrac{1}{\epsilon} \textstyle\int_0^t e^{-s/\epsilon} M_k(u(t-s, x - \lambda_k s))\, ds \right] 1\!\!1_{x > \lambda_k t} \\ &+ \left[f_{k,b}(t - \tfrac{x}{\lambda_k}) e^{-\frac{x}{\epsilon \lambda_k}} + \tfrac{1}{\epsilon} \textstyle\int_0^{\frac{x}{\lambda_k}} e^{-s/\epsilon} M_k(u(t-s, x-\lambda_k s))\, ds \right] 1\!\!1_{\lambda_k > 0\, , x < \lambda_k t} \end{aligned}$$

On pose $w_k = f_k - \overline{f}_k$. A nouveau, l'utilisation de la proposition 2.2.1 nous donne pour tout k

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^{x_J} [w_k]_+(t,x) dx \quad &\leq \lambda_k \textstyle\int_0^t [w_{b,k}(t)]_+ \, dt \\ &+ e^{-\frac{t}{\epsilon}} \textstyle\int_0^{x_J + \sigma t} [w_k]_+(0,x)\, dx \\ &+ \tfrac{1}{\epsilon} \textstyle\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\epsilon}} \int_0^{x_J + \sigma(t-\tau)} [M_k(u) - M_k(\overline{u})]_+(t,x)\, dx\, d\tau \end{aligned}$$

Grace à la propriété **MND** des maxwelliennes, on a

$$\sum_k [M_k(u) - M_k(\overline{u})]_+ = [u - \overline{u}]_+ \leq \sum_k [w_k]_+$$

ce qui donne, après sommation sur toutes les composantes k

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_k \int_0^{x_J} [w_k]_+ dx \quad &\leq \textstyle\sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k \int_0^t [w_{k,b}(s)]_+ ds + \left(\sum_k \int_0^{x_J - \lambda_k t} [w_k^0(x)]_+ dx \right) e^{-\frac{t}{\epsilon}} \\ &+ \tfrac{1}{\epsilon} \textstyle\int_0^t \sum_k \int_0^{x_J - \lambda_k (t-s)} e^{-(t-s)/\epsilon} [w(s,x)]_+ \, dx\, ds \end{aligned}$$

si on appelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(s) = x_J + \sigma(t-s) \\ \\ \mu(s) = \sum_k \int_0^{\omega(s)} [w_k]_+ dx, \end{array} \right. \qquad \text{et}$$

la dernière inégalité permet d'écrire

$$\mu(t) \leq \gamma(t) + \mu(0)e^{-\frac{t}{\epsilon}} + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\epsilon}}\mu(s)\, ds,$$

avec

$$\gamma(t) = \sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k \int_0^t [w_{k,b}(s)]_+ ds.$$

Par le lemme précédent, on a que

$$\begin{aligned} \mu(t) \quad & \leq \gamma(t) + \mu(0)e^{\frac{t}{\epsilon}} + \tfrac{1}{\epsilon}\textstyle\int_0^t e^{-\frac{(2t-\tau)}{\epsilon}}(\gamma(\tau) + \mu(0)e^{\frac{\tau}{\epsilon}})d\tau \\ & \leq 2[\gamma(t) + \mu(0)] \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Théorème 2.3.3 *Soient f le vecteur solution du système (2.3) avec comme données $(u^0(x), u_b(t))$ et $\overline{f}$ un autre vecteur solution du système (2.3) mais pour des données $(\overline{u}^0(x), \overline{u}_b(t))$, pour un même ϵ fixé. Pour tout $K \in \mathbb{R}^+$, on a :*

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^K \sum_{k=1}^N |f_k^\epsilon(x,t) - \overline{f_k^\epsilon}(x,t)|dx \leq 2 \Big(& \textstyle\int_0^{K+\sigma t} |u^0(x) - \overline{u}^0(x)|dx \\ & + \textstyle\sum_{\lambda_k>0} \lambda_k \int_0^t |M_k(u_b(\tau)) - M_k(\overline{u}_b(\tau))|d\tau \Big) \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $\sigma = \max_k |\lambda_k|$

Preuve : On décompose la valeur absolue en

$$|f - \overline{f}| = [f - \overline{f}]_+ - [f - \overline{f}]_-$$

On redémontre le théorème (2.3.2) pour $-[f-\overline{f}]_-$, et on ajoute les inégalités ainsi obtenues aux inégalités (2.20). $\diamondsuit$

2.3.4 Stabilité BV

Le théorème d'existence globale nous donne des estimations uniformes par rapport à ϵ en norme L^∞ de la solution f du problème (2.3), ceci n'est pas suffisant pour passer à la limite dans des topologies fortes. Nous avons donc besoin des estimations uniformes des solutions en norme BV, pour pouvoir extraire une sous-suite convergente dans L^1_{loc}.

Préliminaires

Résultats de régularité

Si $v \in BV(\mathbb{R}^+)$, appelons

$$v^{\delta,\nu} = (v\Psi_\delta + c\chi_\delta) * \phi_\nu = (v(1-\chi_\delta) + c\chi_\delta) * \phi_\nu \tag{2.22}$$

où

$$\psi_\delta = (1 - \chi_\delta)$$

χ_δ est une fonction de troncature monotone décroissante, valant 1 en $x = 0$ et dont le support est compris dans $[0, \delta]$, tandis que ϕ_ν est une approximation de l'unité.

Lemme 2.3.2 *Soient $u_b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+_t)$, et $u^0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+_x)$ des données qu'on approche par $(u^0_{\delta,\nu}, u_b^{\delta,\nu})$ définies par (2.22). Supposons de plus que les maxwelliennes soient* **MND** *, et qu'elles satisfassent (2.4). Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un unique vecteur solution $f^\epsilon_{\delta,\nu}$ de (2.3), de régularité $(C^\infty(\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^+_x))^N$ et si en plus f^ϵ est la solution associée aux données (u_b, u^0), alors $f^\epsilon_{\delta,\nu} \to f^\epsilon$ dans $(L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^+_x))^N$ quand δ, ν tendent vers 0.*

Preuve : On a bien que

$$u_b^{\delta,\nu} \to u_b \quad \text{dans} \quad L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+_t)$$

$$u^0_{\delta,\nu} \to u^0 \quad \text{dans} \quad L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+_x).$$

et $u_b^{\delta,\nu} \in C^\infty(\mathbb{R}^+_t)$ (resp. $u^0_{\delta,\nu} \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$), avec un raccord nul et de régularité C^∞. Il suffit d'appliquer le théorème de la propagation des singularités (voir [36]). En effet les données valant la même constante c autour de $(0,0)$ à n'importe quel ordre de dérivation, aucune discontinuité ne se déplace le long des caractéristiques rentrantes γ_k. Ensuite en utilisant le théorème 2.3.3, on obtient la convergence en norme $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ pour tout t fixé, après, il suffit de prendre le supremum sur tout compact de $\mathbb{R}^+_t$. ♢

Quelques propriétés des fonctions $BV(\mathbb{R}^+)$

Soit u une fonction de $BV(\mathbb{R}^+)$, et $u^{\delta,\nu}$ la fonction tronquée autour de $x = 0$, régularisée de façon standard par une approximation de l'unité. La variation totale de $u^{\delta,\nu}$ ne prend pas en compte ce qui se passe en $x = 0$, car au voisinage de ce point la fonction $u^{\delta,\nu}$ est constante et vaut c. Dans ce paragraphe nous allons montrer comment on relie la variation totale de $u^{\delta,\nu}$ à celle de u.

Lemme 2.3.3 *Si ψ_δ est une fonction de troncature définie par (2.22), u une fonction dans $BV(\mathbb{R}^+)$, alors on a*

$$\forall \gamma > 0 \;\; \exists \alpha_\gamma \;\; s.t \;\; \forall\, \delta < \alpha_\gamma \quad TV(u_\delta) \le TV(u) + |u(0^+) - c| + \gamma$$

où $u_\delta = u\psi_\delta + c\chi_\delta$.

Preuve : D'abord, notons que :

$$u_\delta = u\psi_\delta + c\chi_\delta = u(1-\chi_\delta) + c\chi_\delta = u + \chi_\delta(c-u)$$

On utilise la version discrète de la variation totale et le fait que $\psi_\delta = (1-\chi_\delta)$, pour écrire

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_i |u^\delta(x_i) - u^\delta(x_{i-1})| &= \textstyle\sum_i |u(x_i) - u(x_{i-1}) - [\psi_\delta(x_i)(c-u(x_i)) - \psi_\delta(x_{i-1})(c-u(x_{i-1}))]| \\
&= \textstyle\sum_i |(u(x_i)-c)(1-\chi_\delta(x_i)) - (u(x_i)-c)(1-\chi_\delta(x_{i-1}))| \\
&= \textstyle\sum_i |(u(x_i)-c)\psi_\delta(x_i) - (u(x_i)-c)\psi_\delta(x_{i-1})| \\
&\le \textstyle\sum_i |\psi_\delta(x_i) - \psi_\delta(x_{i-1})||u(x_i)-c| + |u(x_i)-u(x_{i-1})||\psi_\delta(x_{i-1})| \\
&= \textstyle\sum_i |\chi_\delta(x_i) - \chi_\delta(x_{i-1})||u(x_i)-c| + |u(x_i)-u(x_{i-1})||\psi_\delta(x_{i-1})| \\
&\le ||u-c||_{L^\infty(\mathrm{supp}(\chi))} TV(\chi) + ||\psi_\delta||_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} TV(u) \\
&\le ||u-c||_{L^\infty(\mathrm{supp}(\chi))} + TV(u).
\end{aligned}$$

Donc

$$TV(u_\delta) \le ||u-c||_{L^\infty(0,\delta)} + TV(u). \tag{2.23}$$

La fonction u est dans $BV(\mathbb{R}^+)$ donc on sait qu'elle est semi-continue en 0 (cf [52] p 250), ce qui nous donne

$$\forall \gamma > 0 \;\; \exists \alpha_\gamma \;\; \text{s.t} \;\; \forall\, \delta < \alpha_\gamma \; \sup_{x\in[0,\delta]} |u(x) - c| \le |u(0^+) - c| + \gamma$$

Cette dernière propriété permet de majorer l'inégalité (2.23), ce qui termine la preuve. $\diamondsuit$

Lemme 2.3.4 *Si on appelle ψ_ϵ, l'approximation de l'unité, et u une fonction de variation totale finie, alors*

$$TV(u * \phi_\nu) \leq TV(u)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (u*\phi_\nu)\partial_x \psi dx &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} u(y) \mathbb{1}_\Omega(y) \phi_\nu(x-y)\, dy\, \partial_x \psi(x) dx \\ &= \int_\Omega u(y) \partial_x (\phi_\nu(-y) * \psi)\, dy \leq TV(u) \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^+)} \int_\Omega (u * \phi_\nu) \partial_x \psi dx \leq TV(u)$$

ce qui finit la preuve. $\diamondsuit$

Lemme 2.3.5 *Pour une fonction u telle que $u \in BV(\mathbb{R}^+)$, on a pour la troncature et la régularisation définies par (2.22)*

$$\liminf_{\delta,\nu \to 0} TV(u^{\delta,\nu}) \leq TV(u) + |u(0^+) - c|$$

Preuve : La preuve suit en utilisant les deux précédents lemmes. En effet on écrit

$$\liminf_{\delta,\nu \to 0} TV(u^{\delta,\nu}) \leq \liminf_{\delta \to 0} TV(u^\delta)$$

par le lemme 2.3.4. Le résultat vient en utilisant l'estimation du lemme 2.3.3 et en passant a la limite inférieure, ce qui donne

$$\liminf_{\delta \to 0} TV(u^\delta) \leq TV(u) + |u(0^+) - c|.$$

$\diamondsuit$

Résultats sur les solutions régulières

Dans cette partie nous allons montrer que les estimations de la variation totale en espace de la solution du problème (2.3) ne nécessitent pas d'estimation de la variation totale en temps de la trace, comme cela a été fait dans [39]. Pour établir le théorème de stabilité, nous avons besoin d'établir deux lemmes préparatoires.

Lemme 2.3.6 *Supposons que les Maxwelliennes M_k soient* **MND** *, alors*

$$\sum_k \operatorname{sgn}(\partial_x f_k) \partial_x (M_k(u) - f_k) \leq 0 \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+.$$

Preuve : On peut réécrire le terme de gauche de l'énoncé comme :

$$\sum_k \operatorname{sgn}(\partial_x f_k) \partial_x (M_k(u) - f_k) = \sum_k \operatorname{sgn}(\partial_x f_k) M_k'(u) \sum_l \partial_x f_l - \sum_k |\partial_x f_k|$$

En inversant la sommation et la valeur absolue dans le premier terme du membre de gauche dans l'expression précédente, on a :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_k \operatorname{sgn}(\partial_x f_k) \quad & \partial_x (M_k(u) - f_k) = \textstyle\sum_l \partial_x f_l \sum_k \operatorname{sgn}(\partial_x f_k) M_k'(u) - \sum_k |\partial_x f_k| \\ &= \textstyle\sum_l |\partial_x f_l| \sum_k \operatorname{sgn}(\partial_x f_l) \operatorname{sgn}(\partial_x f_k) M_k'(u) - \sum_k |\partial_x f_k| \\ &= \textstyle\sum_l |\partial_x f_l| (\sum_k \operatorname{sgn}(\partial_x f_l) \operatorname{sgn}(\partial_x f_k) M_k'(u) - 1) \end{aligned}$$

et parce que les Maxwelliennes sont non décroissantes, et aussi parce que

$$\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(b) \leq 1 \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

on a bien le résultat désiré. $\diamondsuit$

Lemme 2.3.7 *Pour n'importe quel ensemble de vitesses* $\{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq N}$, *on a :*

$$\sum_k \int_0^T \lambda_k |\partial_x f_k|(t,0)dt \leq \int_0^T |u_b'(t)|dt - |u(T,0) - u_b(T)| + |u(0,0) - u_b(0)|$$

Preuve : En utilisant les équations de (2.3), on transforme les dérivées en espace en la différence entre le terme de collision et la dérivée en temps, pour chaque k. On suppose ici que la condition aux limites u_b et la solution du problème $u(t,0)$ sont de classe $C^1(0,T)$.

$$\begin{aligned}\sum_k \int_0^T \lambda_k |\partial_x f_k|(t,0)dt \quad &\leq \sum_{\lambda_k > 0} \int_0^T |\tfrac{1}{\epsilon}(M_k(u) - M_k(u_b)) - \partial_t M(u_b)|dt \\ &- \sum_{\lambda_k \leq 0} \int_0^T |\tfrac{1}{\epsilon}(M_k(u) - f_k) - \partial_t f_k|dt\end{aligned}$$

Ceci par une simple inégalité triangulaire devient

$$\begin{aligned}\sum_k \int_0^T \lambda_k |\partial_x f_k|(t,0)dt \quad &\leq \int_0^T \sum_{\lambda_k > 0} |\tfrac{1}{\epsilon}(M_k(u) - M_k(u_b))| + |\partial_t M(u_b)| \\ &- \sum_{\lambda_k \leq 0} |\tfrac{1}{\epsilon}(M_k(u) - f_k) - \partial_t f_k|dt.\end{aligned}$$

On voit que les trois derniers termes à l'intérieur de l'intégrale, peuvent être réécris comme

$$\begin{aligned}\sum_k \lambda_k |\partial_x f_k| \quad &= \tfrac{|u-u_b|}{\epsilon} + |u_b'| \\ &- \left(\sum_{\lambda_k \leq 0} |\tfrac{M_k(u) - M_k(u_b)}{\epsilon}| + |M_k'(u_b)| + |\tfrac{(M_k(u) - f_k)}{\epsilon} - \partial_t f_k| \right).\end{aligned}$$

En additionnant tous les termes sur les composantes dont la vitesse est négative, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_k \lambda_k |\partial_x f_k| \quad &\leq \tfrac{|u-u_b|}{\epsilon} + |u_b'| \\ &- \sum_{\lambda_k \leq 0} |\tfrac{M_k(u_b) - f_k}{\epsilon} + \partial_t (M_k(u_b) - f_k)|,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_k \lambda_k |\partial_x f_k| \quad &\leq \tfrac{|u-u_b|}{\epsilon} + |u_b'| \\ &- |\sum_{\lambda_k \leq 0} \tfrac{M_k(u_b) - f_k}{\epsilon} + \partial_t (M_k(u_b) - f_k)|.\end{aligned}$$

Maintenant, utilisant que $u = \sum_{\lambda_k > 0} M_k(u_b) + \sum_{\lambda_k \leq 0} f_k$, on obtient les inégalités suivantes :

$$\sum_k \lambda_k |\partial_x f_k| \leq \frac{|u_b - u|}{\epsilon} + |u_b'| - |\frac{u_b - u}{\epsilon} + \partial_t (u_b - u)|.$$

On se sert de la convexité de la valeur absolue pour écrire

$$\begin{aligned}\sum_k \lambda_k |\partial_x f_k| \quad &\leq -\mathrm{sgn}(\tfrac{u_b - u}{\epsilon}) \partial_t (u_b - u) + |u_b'| \\ &= -\mathrm{sgn}(u_b - u) \partial_t (u_b - u) + |u_b'| \\ &= -\partial_t |u - u_b| + |u_b'|.\end{aligned}$$

Cette dernière estimation intégrée sur $(0,T)$ nous permet de majorer le terme initial par

$$\sum_k \int_0^T \lambda_k |\partial_x f_k|(t,0)dt \leq -\int_0^T \partial_t |u_b - u| + |u_b'|dt,$$

et ceci est le résultat annoncé. $\diamondsuit$

Cas général

Nous allons maintenant utiliser les lemmes 2.3.6 et 2.3.7 pour montrer le théorème 2.3.4. Dans les articles [39, 48], on utilise les estimations en temps pour avoir une estimation de la quantité majorée dans le lemme (2.3.7). Cette technique ne marche que lorsqu'aucune vitesse λ_k n'est nulle, car les quantités qu'on veut estimer sont obtenues à l'aide de la formule de Green. Le point faible de cette technique apparaît lorsque une composante f_k ne possède pas de termes en $\partial_x f_k$ dans le système (2.3), parcequ'alors les estimations des quantités désirées ne peuvent pas être mises en évidence sur le bord par intégration sur l'intérieur du domaine.

Théorème 2.3.4 *Supposons que les Maxwelliennes M_k sont* **MND** *et qu'elles satisfont (2.4), que $u^0 \in BV(\mathbb{R}_x^+)$ et $u_b \in BV(\mathbb{R}_t^+)$, alors si $(f_k)_{1\leq k\leq N}$ est une solution de (2.3), elle vérifie les estimations suivantes*

$$TV(u^\epsilon(t,\cdot)) \leq \sum_k TV(f_k(t,\cdot)) \leq TV(u^0,\mathbb{R}_x^+) + TV(u_b,\mathbb{R}_t^+) + |u^0(0^+) - u_b(0^+)|$$

Preuve : On approche les données (u_b, u^0), par troncature et régularisation $(u_b^{\delta,\nu}, u^0_{\delta,\nu})$. Ceci implique par la proposition 2.3.2, une régularité C^∞ de $f^{\epsilon,\delta,\nu}$,la solution du système (2.3) avec les données régularisées. On dérive par rapport à x toutes les équations de (2.3), et ensuite on multiplie l'équation de la composante f_k par $\mathrm{sgn}(\partial_x f_k)$, et on somme toutes les équations. Ceci donne :

$$\sum_k \partial_t |f_{k,x}^{\delta,\nu}| + \sum_k \lambda_k \partial_x |f_{k,x}^{\delta,\nu}| = \sum_k \mathrm{sgn}(f_{k,x}^{\delta,\nu})\partial_x(M_k(u^\delta) - f_k^\delta).$$

où $f_{k,x}^{\delta,\nu} = \partial_x f_k^\delta$ Le dernier terme de l'égalité précédente est négatif pour tout (t,x) grâce au lemme 2.3.6. L'égalité devient

$$\sum_k \partial_t |f_{k,x}^{\delta,\nu}| + \sum_k \lambda_k \partial_x |f_{k,x}^{\delta,\nu}| \leq 0$$

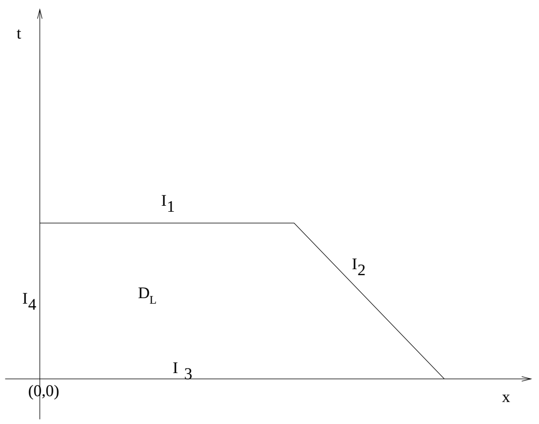


FIG. 2.1 – Domaine d'intégration

En appliquant le théorème de la divergence au domaine $D_L^t = \{(\tau,x) \in (0,t)\times\mathbb{R}^+ \ : 0 < x < L + \sigma(t-\tau)\}$, on obtient

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_k \int_0^L |f_{k,x}^{\delta,\nu}(t,x)|dx \quad &\leq \textstyle\sum_k \int_0^{L+\sigma t} |f_{k,x}^{\delta,\nu}(0,x)|dx + \sum_k \int_0^t \lambda_k |f_{k,x}^{\delta,\nu}(\tau,0)|\, d\tau \\ &\quad - \textstyle\sum_k \int_{I_2} (\nu_t + \lambda_k \nu_x)|f_{k,x}^{\delta,\nu}(\tau,x(\tau))|\, d\tau\end{aligned} \tag{2.24}$$

où ν est le vecteur normal sortant du domaine D_L. Sur I_2, il a pour composantes

$$\nu = \begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on réécrit le terme de bord sur l'interface I_2 comme

$$\sum_k \int_{I_2} (\nu_t + \lambda_k \nu_x)|f_{k,x}^{\delta,\nu}(\tau, x(\tau))| \, d\tau = \sum_k \int_{I_2} (\sigma + \lambda_k)|f_{k,x}^{\delta,\nu}(\tau, x(\tau))| \, d\tau$$

Il suffit que $\sigma = \max_k |\lambda_k|$ pour que $(\sigma + \lambda_k) \geq 0$, pour tout k, ce qui fait que ce terme peut être négligé dans (2.24) parce que

$$-\sum_k \int_{I_2} (\nu_t + \lambda_k \nu_x)|f_{k,x}^{\delta,\nu}(\tau, x(\tau))| \, d\tau \leq 0.$$

De (2.24), il reste donc :

$$\sum_k \int_0^L |f_{k,x}^{\delta,\nu}(t,x)|dx \leq \sum_k \int_0^{L+\sigma t} |f_{k,x}^{\delta,\nu}(0,x)|dx + \sum_k \int_0^t \lambda_k |f_{k,x}^{\delta,\nu}(\tau, 0)| \, d\tau$$

Utilisant le lemme (2.3.7), on estime le terme de trace par :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_k \int_0^L |f_{k,x}^{\delta,\nu}(t,x)|dx \leq \; & \textstyle\sum_k \int_0^{L+\sigma t} |f_{k,x}^{\delta,\nu}(0,x)|dx + \int_0^t |(u_b^{\delta,\nu})'(\tau)|d\tau \\ & -|u^\delta(t,0) - u_b^{\delta,\nu}(t)| + |u^\delta(0,0) - u_b^{\delta,\nu}(0)|. \end{aligned}$$

Par troncature nous avons supposé que $u_b^{\delta,\nu}(0) = c$, et $u_{\delta,\nu}^0(0) = c$, donc le dernier terme de l'inégalité précédente disparaît. La condition initiale est projetée sur la surface d'équilibre

$$\sum_k \int_0^{L+\sigma t} |f_{k,x}^{\delta,\nu}(0,x)| \, dx = \sum_k \int_0^{L+\sigma t} |\partial_x M_k(u_{\delta,\nu}^0(x))| \, dx = \int_0^{L+\sigma t} |\partial_x u_{\delta,\nu}^0(x)| \, dx,$$

ce qui donne la borne $BV(\mathbb{R}_x^+)$ pour les solutions assez régulières :

$$TV(f^{\epsilon,\delta}) \leq TV(u_{\delta,\nu}^0, \mathbb{R}_x^+) + TV(u_b^{\delta,\nu}, \mathbb{R}_t^+). \tag{2.25}$$

où $TV(f^{\epsilon,\delta})$ désigne la somme des variations totales sur chaque composante $k \in 1, \ldots, N$.

Grâce au lemme 2.3.5, on peut passer à la limite inférieure dans (2.25), et cela devient

$$\liminf_{\delta,\nu \to 0} TV(f^{\epsilon,\delta}) \leq TV(u^0, \mathbb{R}_x^+) + TV(u_b, \mathbb{R}_t^+) + |u_b(0) - c| + |u^0(0) - c|$$

On sait d'après la proposition 2.3.2 que $f^{\epsilon,\delta}$ converge dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+)$ vers f^ϵ, donc on a

$$||f^\epsilon(t,\cdot)||_{TV(\mathbb{R}^+)} \leq \lim \inf_{\delta,\nu \to 0} ||f^{\epsilon,\delta}(t,\cdot)||_{TV(\mathbb{R}^+)} \leq TV(u^0, \mathbb{R}_x^+) + TV(u_b, \mathbb{R}_t^+) + |u_b(0) - c| + |u^0(0) - c|$$

Et en posant

$$c = \frac{u_b(0) + u^0(0)}{2}.$$

on obtient l'estimation annoncée qui est optimale.

$\diamondsuit$

2.4 Convergence vers la solution entropique

Grâce au précédent résultat de stabilité BV, on obtient les énoncés suivants.

Proposition 2.4.1 *Il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $K \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $t > 0$ on a*

$$\int_0^K \sum_k |M_k(u^\epsilon) - f_k^\epsilon|(t,x)dx \leq C\epsilon(TV(u_b, \mathbb{R}_t^+) + TV(u^0, \mathbb{R}_x^+) + |u^0(0) - u_b(0)|)$$

pour tout $k = 1, \ldots, N$

Preuve : Grâce au théorème 2.3.3, ce n'est pas restrictif d'assumer que les données sont régulières et qu'elles se raccordent à l'origine. Dans ce cas on peut écrire l'équation suivante pour $k = 1, \dots, N$

$$\partial_t(f_k - M_k(u)) + \frac{1}{\epsilon}(f_k - M_k(u)) = -\lambda_k \partial_x f_k + M_k'(u) \sum_k \lambda_k \partial_x f_k$$

On multiplie par $\mathrm{sgn}(f_k - M_k(u))$ l'équation précédente, on intègre sur $(0, K) \times (0, T)$, et on obtient alors

$$\int_0^K \sum_k |f_k - M_k(u)|(t,x)\, dx \leq C \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\epsilon}} \int_0^K \sum_k |\partial_x f_k(x,s)|\, dx\, ds$$

où C est une constante adéquate. La conclusion est conséquence du théorème 2.3.4 $\diamondsuit$

Equicontinuité en temps

Proposition 2.4.2 *Si f^ϵ est le vecteur solution de (2.3), et sous les hypothèses standard des résultats précédents, on a*

$$\sum_k \int_0^L |f_k^\epsilon(t+\tau, x) - f_k^\epsilon(t,x)| dx \leq C\tau$$

où $C = \sup_k |\lambda_k| (TV(u^0, \mathbb{R}^+) + TV(u_b, (0,T)) + |u_b(0^+) - u^0(0^+)|)$ est une constante indépendente de ϵ.

Preuve : On appelle $\tilde{f}_k^\epsilon$ la solution du problème (2.3) avec les données régularisées de la même manière que dans le théorème 2.3.4. Alors pour toute solution faible, on écrit :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_k \int_0^L |f_k^\epsilon(t+\tau,x) - f_k^\epsilon(t,x)| dx \quad &\leq \textstyle\sum_k \int_0^L |f_k^\epsilon(t+\tau,x) - \tilde{f}_k^\epsilon(t+\tau,x)| dx \\ &+ \textstyle\sum_k \int_0^L |\tilde{f}_k^\epsilon(t+\tau,x) - \tilde{f}_k^\epsilon(t,x)| dx \\ &+ \textstyle\sum_k \int_0^L |\tilde{f}_k^\epsilon(t,x) - f_k^\epsilon(t,x)| dx\end{aligned}$$

Grâce au théorème de comparaison 2.3.2 l'inégalité précédente devient :

$$\sum_k \int_0^L |f_k^\epsilon(t+\tau,x) - f_k^\epsilon(t,x)| dx \leq 2\delta C + \sum_k \int_0^L |\tilde{f}_k^\epsilon(t+\tau,x) - \tilde{f}_k^\epsilon(t,x)| dx$$

Il ne reste donc qu'à établir l'équicontinuité pour des solutions régulières :

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_k \int_0^L |\tilde{f}_k^\epsilon(t+\tau,x) - \tilde{f}_k^\epsilon(t,x)| dx = \int_0^L |\int_t^{t+\tau} \partial_t \tilde{f}_k^\epsilon(s,x) ds| dx \\ &\textstyle\sum_k \leq \int_t^{t+\tau} \int_0^L |\frac{1}{\epsilon}(M_k(\tilde{u}) - \tilde{f}_k^\epsilon) - \lambda_k \partial_x \tilde{f}_k^\epsilon|(s,x) dx ds \\ &\leq C'' \textstyle\int_t^{t+\tau} ds (TV(\tilde{u}_b, (0,T)) + TV(\tilde{u}^0, \mathbb{R}_x^+))\end{aligned}$$

la dernier terme est obtenu grâce à la proposition refcm et à l'estimation (2.25). Au total on a

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_k \int_0^L |f_k^\epsilon(t+\tau,x) - f_k^\epsilon(t,x)| dx \quad &\leq 2\delta C + \tau C''(TV(\tilde{u}_b, (0,T)) + TV(\tilde{u}^0, \mathbb{R}_x^+)) \\ &\leq C''\tau \liminf_{\delta \to 0} (TV(\tilde{u}_b, (0,T)) + TV(\tilde{u}^0, \mathbb{R}_x^+)) \\ &\leq C''\tau (TV(u^0, \mathbb{R}^+) + TV(u_b, (0,T)) + |u_b(0^+) - u^0(0^+)|)\end{aligned}$$

en passant à la limite inférieure dans la précédente inégalité on obtient donc le résultat désiré. $\diamondsuit$
On remarque que la propriété précédente prouve l'équicontinuité de l'approximation $u^\epsilon = \sum_k f_k^\epsilon$.

Compacité et convergence

Proposition 2.4.3 *De la suite $(f^\epsilon)_\epsilon$ on peut extraire une sous-suite convergente vers f dans $C([0,T], L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^+_x))$. $u = \sum_k f_k$ est une solution du problème (2.1)*

Preuve : On utilise ici la démonstation classique de [28, 5].

$$\begin{cases} u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^+) \cap BV(\mathbb{R}^+) \\ \\ u_b \in L^\infty(0,T) \cap BV(0,T) \end{cases}$$

sont des fonction à support compact. Les résultats de stabilité permettent d'écrire, pour tout compact $K = [0, L]$,

$$\begin{cases} ||u^\epsilon(t,\cdot)||_{L^1(K)} \leq ||u^0||_{L^1(K+\sigma T)} + C||u_b||_{L^1(0,T)} \\ \\ TV(u^\epsilon(t,\cdot), K) \leq TV(u^0, \mathbb{R}^+) + TV(u_b, (0,T)) + |u_b(0^+) - u^0(0^+)| \\ |u^\epsilon(t,x)| \leq \mu_\infty \quad \text{p.p. } (t,x) \in [0,T] \times K \end{cases} \tag{2.26}$$

Parce que les sous-ensembles bornés de $BV(K) \cap L^1(K)$ sont précompacts dans $L^1(K)$, les remarques précédentes donnent

$$\{u^\epsilon(t,\cdot) : 0 \leq t \leq T, \ \ \epsilon \in [0,1]\} \text{ précompact dans } L^1(K) \tag{2.27}$$

L'équicontinuité en temps démontrée dans la proposition 2.4.2, donne

$$||u^\epsilon(t_1,\cdot) - u^\epsilon(t_2,\cdot)||_{L^1(K)} \leq C|t_1 - t_2|(+|u^0(0^+) - u_b(0^+)|) \tag{2.28}$$

Par la preuve du théorème d'Ascoli-Arzela, (2.27) et (2.28) garantissent que si $\epsilon \to 0$, il existe une sous-suite u^{ϵ_l} et une fonction $u : (0,T) \to L^1(K)$ telle que

$$\lim_{l \to +\infty} \max_{t \in (0,T)} ||u^{\epsilon_l}(t,\cdot) - u(t,\cdot)||_{L^1(K)} = 0 \ \ T > 0 \tag{2.29}$$

De (2.26) et (2.28) on tire que

$$\begin{cases} u \in L^\infty(K) \ \ \forall t > 0 \\ \\ ||u(t_1,\cdot) - u(t_2,\cdot)||_{L^1(K)} \leq C|t_2 - t_1|(||u^0||_{BV(K+\sigma T)} + ||u_b||_{BV(0,T)}) \end{cases} \tag{2.30}$$

En extrayant à nouveau une sous-suite si nécessaire, on a $u^{\epsilon_l} \to u$ presque partout en $(t,x) \in [0,T] \times K$. Parce que f^ϵ est solution faible en additionnant les équations au sens des distributions on a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} u^\epsilon \partial_t \phi + \sum_k \lambda_k f_k^\epsilon \partial_x \phi = 0,$$

ce qui devient grâce à la proposition 2.4.1

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} u \partial_t \phi + F(u) \partial_x \phi = 0$$

par passage à la limite. De plus par (2.30), on a consistance avec les conditions initiales dans $L^1(\mathbb{R}^+)$.

$\diamondsuit$

Définition 2.4.1 *Soient $u^0 \in BV(\mathbb{R}^+)$ et $u_b \in BV(0,T)$ ($T > 0$). On dit que la fonction $u \in BV(\mathbb{R}^+ \times (t,0)$ est une solution entropique du problème (2.1) si*

i) pour toute fonction test $\phi \in C^1_0(\mathbb{R}^+ \times [0,T))$, avec $\phi \geq 0$, et pour tout $k \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} |u - k| \partial_t \phi + \text{sgn}(u-k)(F(u) - F(k) \partial_x \phi \, dxdt$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^+} |u^0 - k| \phi \, dx \geq 0;$$

ii) pour presque partout $t \in (0,T)$

$$\max\{\operatorname{sgn}(u(t,0)-u_b(t))(F(u(t,0))-F(k)) \,:\, k \in I(u_b(t),u(t,0))\} = 0. \quad (2.31)$$

Proposition 2.4.4 *Soif $(f_k^\epsilon)_{1\le k\le N}$ le vecteur solution du système (2.3), avec pour données $u^0 \in BV(\mathbb{R}_x^+)$, $u_b \in BV(\mathbb{R}_t^+)$. Alors pour tout $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_t^+)$, avec $\phi \ge 0$, et pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}+} \sum_k |f_k^\epsilon - M_i(c)|(\partial_t\phi + \lambda_i\partial_x\phi)\, dxdt$$

$$+ \int_{\mathbb{R}+} \sum_k |M_k(u_0) - M_k(c)|\phi(x,0)\, dx + \int_0^T \sum_k \lambda_k |f_k^\epsilon - M_k(c)|\phi(0,t)\, dt \qquad (2.32)$$

$$\ge \tfrac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{R}+} (\sum_k |f_k^\epsilon - M_k(c)| - |u-c|)\phi\, dxdt \ge 0.$$

Preuve : Comme pour les résultats déjà établis, on utilise le système (2.3), dont on multiplie chaque composante par $\operatorname{sgn}(f^\epsilon - M_k(c))\phi(x,t)$. En sommant sur toutes les composantes et en intégrant sur tout le domaine $(0,T)\times\mathbb{R}^+$, on obtient

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}+}\int_0^T \sum_k |f_k^\epsilon - M_k(c)|(\partial_t + \lambda_k\partial_x)\phi\; dt\; dx + \int_{\mathbb{R}+}\sum_k |M_k(u^0)_k - M_k(c)|\phi(0,x)dx$$

$$\textstyle+\int_0^T \sum_k \lambda_k |f_k^\epsilon - M_k(c)|\phi(t,0)\; dt = \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}+}\int_0^T \sum_k \operatorname{sgn}(f^\epsilon - M_k(c)(f^\epsilon - M_k(u^\epsilon))\phi(x,t)$$

On a de façon évidente

$$\sum_k \operatorname{sgn}(f^\epsilon - M_k(c))(M_k(u^\epsilon) - M_k(c)) \le \sum_k |M_k(u^\epsilon) - M_k(c)|$$

or grâce au relations de compatibilité (2.4) on sait que

$$\sum_k |M_k(u^\epsilon) - M_k(c)| = |u^\epsilon - c| \le \sum_k |f^\epsilon - M_k(c)|$$

ceci démontre la proposition. $\diamondsuit$

Ici, on introduit une nouvelle démonstration pour l'unicité de la solution limite. En effet, dans [39], les auteurs démontrent que l'inégalité d'entropie obtenue par la proposition précédente converge vers l'inégalité limite de la loi de conservation scalaire (2.1). Pour ce faire ils utilisent la convergence forte de la solution à l'intérieur du domaine et les estimations BV en temps faites sur les composantes négatives fournissent la convergence forte sur le bord. Nous allons montrer que ces dernières estimations ne sont pas nécessaires pour établir ce résultat.

Théorème 2.4.1 *Soient $u^0 \in BV(\mathbb{R}_x^+)$, $u_b \in BV(0,T)$. Alors soit f solution du système (2.3) ($\epsilon > 0$) donnée par le théorème 2.3.1. Soit*

$$u \in C^0([0,+\infty[; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)) \cap L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^+)$$

l'unique solution au sens de la définition 2.4.1, alors, quand $\epsilon \to 0$,

$$u^\epsilon = \sum_k f_k^\epsilon \to u \;\; dans\;\; C^0((0,T); L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+))$$

Pour montrer la convergence vers la solution entropique, on a besoin du résultat suivant

Lemme 2.4.1 *Si on pose $S_k(f_k) = |f_k - M_k(c)|$, l'entropie microscopique associée à l'entropie de Kružkov pour l'équation scalaire (2.1), on a*

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{\lambda_k>0} \lambda_k |M_k(u_b) - M_k(c)| + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k |f_k - M_k(c)| \\ &\textstyle\le \operatorname{sgn}(u_b - c)[\sum_{\lambda_k>0} \lambda_k M_k(u_b) + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k f_k - F(c)] \end{aligned} \qquad (2.33)$$

Preuve : En utilisant que

$$\sum_k \lambda_k |M_k(u_b) - M_k(c)| = \mathrm{sgn}(u_b - c)[F(u_b) - F(c)],$$

grâce aux relations de compatibilité (2.4), on peut voir que :

$$\sum_{\lambda_k>0} \lambda_k |M_k(u_b) - M_k(c)| + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k |f_k - M_k(c)| =$$

$$\mathrm{sgn}(u_b - c)[F(u_b) - F(c)] + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k (|f_k - M_k(c)| - |M_k(u_b) - M_k(c)|).$$

A cause de la convexité des entropies microscopiques, la dernière inégalité devient

$$\sum_{\lambda_k>0} \lambda_k |M_k(u_b) - M_k(c)| + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k |f_k - M_k(c)|$$

$$\leq \mathrm{sgn}(u_b - c)[F(u_b) - F(c)] + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k \mathrm{sgn}(M_k(u_b) - M_k(c))(f_k - M_k(u_b)).$$

Les fonctions M_k sont toutes non décroissantes, d'où l'on tire :

$$\sum_{\lambda_k>0} \lambda_k |M_k(u_b) - M_k(c)| + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k |f_k - M_k(c)|$$

$$\leq \mathrm{sgn}(u_b - c)[F(u_b) - F(c) + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k (f_k - M_k(u_b))].$$

Et

$$\sum_{\lambda_k>0} \lambda_k M_k(u_b) = F(u_b) - \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k M_k(u_b)$$

donne le résultat voulu. ♢

Finalement on donne la preuve de la consistance avec l'inégalité d'entropie limite
Preuve du théorème 2.4.1 : Par la proposition 2.4.4 on a :

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} \sum_k |M_k(f_k^\epsilon) - M_k(c)|(\partial_t + \lambda_k \partial_x)\phi(x,t)dxdt \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^+} \sum_k |M_k(u^0)) - M_k(c)|\phi(x,0)dx \\ &\leq \int_0^T \sum_k \lambda_k |M_k(f_k^\epsilon(0,t)) - M_k(c)|\phi(0,t)dt \end{aligned} \tag{2.34}$$

Le dernier terme peut être réécrit comme :

$$\int_0^T \sum_{\lambda_k>0} \lambda_k |M_k(u_b(t))) - M_k(c)| + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k |M_k(f_k^\epsilon(0,t)) - M_k(c)| dt.$$

Alors, dans (2.34), on utilise l'inégalité (2.33) pour obtenir

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} \sum_k |f_k^\epsilon - M_k(c)|(\partial_t + \lambda_k \partial_x)\phi(x,t)dxdt \\ &- \int_{\mathbb{R}^+} \sum_k |M_k(u^0) - M_k(c)|\phi(x,0)dx \\ &\leq \int_0^T \mathrm{sgn}(u_b(t) - c)[\sum_{\lambda_k>0} \lambda_k M_k(u_b(t)) + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k f_k^\epsilon - F(c)]\phi(0,t)dt \end{aligned} \tag{2.35}$$

Et à cause des résultats de stabilité établis précédemment, l'expression ci-dessus tend vers

$$\begin{aligned} &- \int_{\mathbb{R}_+ \times (0,T)} |u - c|\partial_t \phi + \mathrm{sgn}(u - c)(F(u) - F(c))\partial_x \phi dxdt \\ &- \int_{\mathbb{R}_+} |u(x,0) - c|\phi(x,0)dx \\ &\leq \int_0^T \mathrm{sgn}(u_b(t) - c)[\sum_{\lambda_k>0} \lambda_k M_k(u_b(t)) + \xi(t) - F(c)]\phi(0,t)dt. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Notons que les termes qu'on intègre à l'intérieur du domaine et en $t = 0$ sont obtenus par passage à la limite dans $C([0,T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^+))$, tandis que les termes de bord sont obtenus seulement au sens $L^\infty(0,T)$ faible-*.

Pour vérifier la relation de compatibilité (2.31), on prend comme fonction test

$$\phi(x,t) = \rho(t)\max\{0, 1 - \frac{x}{\eta}\}, \qquad \eta \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

et on fait tendre η vers zéro. Alors on a

$$\int_0^T \operatorname{sgn}(u(0,t) - c)(F(u(0,t)) - F(c))\rho(t)dt$$

$$\leq \int_0^T \operatorname{sgn}(u_b(t) - c)[\textstyle\sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k M_k(u_b) + \xi(t) - F(c)]\rho(t)dt.$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{sgn}(u(0,t) - c)(F(u(0,t)) - F(c)) \leq \operatorname{sgn}(u_b(t) - c)[\sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k M_k(u_b) + \xi(t) - F(c)].$$

En prenant $c > \sup(u(0,t), u_b(t))$ et $c < \inf(u(0,t), u_b(t))$ on obtient :

$$\xi(t) = F(u(0,t)) - \sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k M_k(u_b(t)),$$

on remplace $\xi(t)$ par sa valeur dans (2.36) et on obtient le terme de bord attendu. $\diamondsuit$

Chapitre 3

Schémas numériques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons un nouvelle classe de schémas numériques basés sur une approximation cinétique discrète des lois de conservation scalaires. On considère une solution faible $u : [0,T] \times \mathbb{R}_x^+ \to \mathbb{R}$ pour un problème avec bord :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+ \\ \\ u(0,x) = u^0(x) \text{ sur } \{0\} \times \mathbb{R}_x^+ \end{cases} \tag{3.1}$$

où la fonction flux F est C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Au bord, on impose, au sens faible [5], la condition suivante

$$u(t,0) = u_b(t) \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \{0\}, \tag{3.2}$$

On utilise un système semi-linéaire de taille $N \times N$, de type BGK pour construire des discrétisations de (3.1)-(3.2).

$$\begin{cases} \partial_t f_k + \lambda_k \partial_x f_k = \frac{1}{\epsilon}(M_k(u^\epsilon) - f_k), \quad k \in \{1, \ldots, N\}, \\ \\ f_k(0,x) = M_k(u^0(x)), \quad t = 0, \ x \in \mathbb{R}^+ \\ \\ f_k(t,0) = M_k(u_b(t)), \quad \forall \lambda_k > 0 \quad \text{et } x = 0, \ t \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

où $u^\epsilon = \sum_k f_k$, et $(\lambda_k)_{k \in \{1,\ldots,N\}}$ une suite de réels non tous nuls. Les vecteurs f_k sont des fonctions de $[0,T] \times \mathbb{R}_x^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les fonctions M_k sont appelées maxwelliennes, et sont dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on suppose que ces fonctions satisfont les relations de compatibilité avec le système (3.1), pour tout u dans un pavé I de $\mathbb{R}$, on doit avoir :

$$\begin{cases} \sum_k M_k(u) = u, \\ \\ \sum_k \lambda_k M_k(u) = F(u). \end{cases} \tag{3.4}$$

Il est facile de voir que, si f_k^ϵ converge dans des topologies fortes vers une limite f_k, pour tout $k = \{1, \ldots, N\}$ et comme $u^\epsilon(0,x) = \sum_k f_k^\epsilon(0,x) = \sum_k M_k(u^0(x)) = u^0(x)$, alors $u = \sum_k f_k$ est solution du système (3.1), mais on ne peut pas garantir que la condition aux limites sera respectée partout, (voir [5, 20]). Le terme de droite dans (3.3) est un terme de collision donné par la différence entre un terme non-linéaire, qui décrit l'équilibre du système, dans notre cas $M_k(u)$ et l'inconnue f_k. Notre but ici est de construire des schémas numériques pour le système (3.3) afin d'obtenir une approximation de (3.1) en passant à la limite $\epsilon = 0$.

Dans le cadre général des problèmes de relaxation, voir [50], l'approximation (3.3) a besoin d'une condition de stabilité afin de tendre vers la limite correcte. Pour les systèmes hyperboliques relaxés 2×2, cette condition est connue sous le nom de condition sous-caractéristique. L'analyse asymptotique de Chapman-Enskog [50], donne la condition de stabilité suivante pour les systèmes BGK en une dimension d'espace [3] :

$$\sum_k \lambda_k^2 M_k'(u) \geq (F')^2 \tag{3.5}$$

pour tout u appartenant à I un borné de $\mathbb{R}$.

En fait, dans [39], puis dans le chapitre précédent, la convergence de u^ϵ vers l'unique solution entropique de (3.1) au sens de [5] a été obtenue grâce la relation suivante : toutes les maxwelliennes $(M_k, \forall k)$ doivent être monotones non décroissantes (**MND**) sur I un domaine invariant que l'on définira plus bas. Il est à noter que cette condition implique (3.5). L'argument principal réside dans le fait que, sous cette dernière condition, le terme source de (3.3) est quasi-monotone au sens de [23], et ceci implique des propriétés de comparaison et de stabilité pour le système (3.3).

Dans le système (3.3), λ_k appartient à un ensemble discret et fini. On appelle BGK continu un modèle où la vitesse appartient au contraire à un ensemble continu et non nécessairement borné (par exemple $\lambda \in \mathbb{R}$), ce qui signifie dans notre cas que λ est une variable au même titre que x ou t. L'approximation cinétique continue des systèmes de lois de conservation est classique pour la dynamique des gaz. En particulier, les équations d'Euler peuvent être obtenues comme limite de l'équation de Boltzmann; voir [14, 15]. La théorie rigoureuse de l'approximation pour des solutions contenant des chocs est récente, et les résultats principaux sont obtenus seulement pour le cas scalaire ($u \in \mathbb{R}$). Pour le problème de Cauchy, avec un modèle BGK continu, le premier résultat a été obtenu dans [12] (voir aussi [21]), pour la méthode de pas fractionnaires avec une condition d'entropie pour la solution (faible) limite. Plus tard, dans [45], un autre résultat de convergence a été exhibé avec un modèle BGK continu. D'autres résultats ont été obtenus pour des systèmes en particulier, ou des systèmes partiellement cinétiques dans [32, 26]. On peut trouver certains schémas numériques dans [44, 13].

Pour un modèle à vitesse discrète, pour le problème de Cauchy, dans [27], S. Jin et Z. Xin étaient les premiers à étudier la discrétisation du système de relaxation suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0 \\ \\ \partial_t v + \lambda^2 \partial_x u = \frac{1}{\epsilon}(F(u) - v) \end{cases} \tag{3.6}$$

qu'on diagonalise sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t f_1 + \lambda \partial_x f_1 = \frac{1}{\epsilon}(M_1(u) - f_1) \\ \\ \partial_t f_2 - \lambda \partial_x f_2 = \frac{1}{\epsilon}(M_2(u) - f_2) \end{cases}$$

et ont obtenu une classe de schémas aussi bien en une qu'en plusieurs dimensions d'espace. La convergence des schémas discrétisant le système relaxé (3.6) a été démotrée dans [2].

Dans [3], Denise Aregba et Roberto Natalini ont montré la convergence des schémas numériques dans le cas de systèmes BGK diagonaux. La différence entre les deux études réside dans l'extention multidimensionnelle du système (3.6). Pour [27], on associe une équation suplémentaire par flux, alors que dans [3] les auteurs gardent un système diagonal dans toutes les directions et choisissent les maxwelliennes satisfaisant les relations (3.4) et la contrainte **MND** .

En ce qui concerne le problème mixte, dans le cas continu, Z. Xin et W.C. Wang ont étudié le modèle (3.6) avec comme condition aux limites imposée

$$f_1^\epsilon(t, 0) + f_2^\epsilon(t, 0) = u_b(t)$$

et ont montré la convergence de l'approximation cinétique vers l'unique solution entropique seulement dans le cas de données assez petites autour d'un état constant u^* non transsonique (i.e. $F'(u^*) \neq 0$). La stabilité des schémas associés et leur consistance avec les inégalités d'entropie numérique sont abordées dans [17]. Cependant il manque dans cet article les arguments de convergence qui permettraient de passer à la limite sur les traces quand le paramètre de discrétisation Δ tend vers 0. Ainsi les résultats ne sont valables que pour une condition aux limite de type Dirichlet homogène ($u_b = 0$).

Dans [39], Andrea Terracina et Roberto Natalini ont prouvé la convergence du modèle continu (3.6) vers (3.1) sans aucune restriction ni sur les flux ni sur les données. Ces résultats sont obtenus grâce à une condition au bord différente :

$$f_+(t,0) = M_k(u_b(t)). \tag{3.7}$$

Ici nous présentons l'équivalent de [3], mais avec un bord. Cette partie représente aussi la discrétisation des résultats trouvés dans [39] ainsi que dans le précédent chapitre. Les schémas numériques sont construits grâce au splitting de (3.1) en une partie linéaire homogène et un système différentiel ordinaire qui est résolu exactement grâce à la structure du terme source. Cette construction nous permet de préserver des propriétés de monotonie de (3.3) et de démontrer des résultats de convergence. En outre les schémas s'étendent au cas des systèmes comme il sera montré dans la partie des tests numériques au prochain chapitre. Ces schémas montrent les avantages de l'approximation cinétique (voir [27, 38, 3, 49]) :

- formulation simple même dans le cas de systèmes en plusieurs dimension d'espace
- hyperbolicité
- régularité des solution approchées

Les avantages majeurs de l'approximation numérique elle-même sont :

- il n'y a pas besoin de résoudre de problème de Riemann pour créer un schéma numérique
- le cas scalaire et le cas vectoriel sont discrétisés de la même manière
- le système (3.3) est diagonal, ce qui est très commode pour des raison aussi bien théoriques que numériques
- on peut facilement changer le nombre et la géométrie des vecteurs vitesses dans les schémas et augmenter ainsi la précision.

Dans ce sens nos travaux partagent les qualités déjà vues dans [40, 29, 33], où on trouve des schémas très simples, qui ne nécessitent pas de solveur de Riemann dans leur construction pour approcher des systèmes généraux de lois de conservation. Les algorithmes présentés ci-dessous ne sont certainement pas optimaux, mais ils illustrent cependant comment construire une approximation simple et efficace même pour des systèmes compliqués.

Après quelques notations, nous présentons les schémas cinétiques issus de la discrétisation de (3.3). Dans un formalisme qui regroupe des schémas du premier et second ordre de précision en espace, nous montrons tous les résultats de stabilité et de convergence vers une solution faible de (3.1), et ce dans le cas général d'une distribution quelconque de vitesses. Cette démarche permet de formuler aussi des schémas dans le cas multidimensionel pour des maillages structurés. Nous nous intéressons, ensuite, au schémas dont la précision est du premier ordre en espace. Nous montrons que lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, ces schémas approchent l'unique solution entropique de (3.1). Pour finir nous montrons comment construire près du bord les schémas $MUSCL$ associés à la phase transport, en respectant les critères de stabilité exhibés dans la première partie.

3.2 Les schémas numériques

3.2.1 Notations

Avant de donner la forme explicite des schémas, introduisons quelques notations. Dans cette partie nous nous restreignons à l'étude de maillages structurés uniformes, c'est-à-dire

. en espace

$$\mathbb{R}^+ = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [i\Delta x, (i+1)\Delta x]$$

. en temps

$$(0,T) = \bigcup_{0\le n\le L-1} [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$$

Les coefficients Δt, Δx sont appelés les pas de discrétisation. On note usuellement

$$x_i = (i + \tfrac{1}{2})\Delta x \quad t^n = n\Delta t.$$

Et on cherche la solution discrète sous la forme

$$f_\Delta(t,x) = \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i^n \mathbb{I}_{[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]\times[t^n,t^{n+1}[}(t,x)$$

où f_i^n est une approximation de

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(t^n,x)\,dx$$

On définit de la même façon,

$$f_\Delta^n(x) = \sum_{i\geq 0} f_i^n \mathbb{I}_{[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]}(x).$$

On discrétise les données du problème (3.1) de la façon suivante

$$u_b^n = \tfrac{1}{\Delta t}\textstyle\int_{t^n}^{t^{n+1}} u_b(t)dt \qquad 0 \leq n \leq L-1$$

$$u_i^0 = \tfrac{1}{\Delta x}\textstyle\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u^0(x)dx \qquad i \in \mathbb{N}$$

Remarque 3.2.1 *Nous travaillons sur des maillages uniformément structurés, il est bien évident que les mêmes notions peuvent être adaptées au cas où Δx n'est pas uniforme, et Δt n'est pas constant.*

3.2.2 Discrétisation

Notre but est d'obtenir une approximation de (3.1), qui soit stable, consistante et de forme conservative

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[g_{i+\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2}}] \ \ \forall i \geq 0 \tag{3.8}$$

où $g_{i+\frac{1}{2}}$ est consistant avec $F(u)$. Dans ce chapitre nous étudions les schémas issus du système (3.3), pour $\epsilon = 0$. Cela est possible, en effet, car tous les résultats de stabilité peuvent être obtenus à ϵ fixé, et les bornes obtenues sont indépendantes d'ϵ. Par compacité on passe facilement à la limite en ϵ, pour un pas de discrétisation Δ fixé, et ainsi on obtient un schéma limite qui peut être compris à la fois de façon microscopique avec des expression explicites en $f_{k,\Delta}(t,x)$, et comme schéma macroscopique où n'apparaît que la variable $u_\Delta(t,x)$.

Par exemple si on utilise une schéma décentré amont classique pour résoudre la partie transport du système (3.3), on obtient quand $\epsilon = 0$, un flux numérique qui s'écrit

$$g_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{\lambda_k>0} \lambda_k M_k(u_i^n) + \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k M_k(u_{i+1}^n).$$

Sur la cellule du bord on a :

$$u_0^{n+1} = u_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[g_{\frac{1}{2}}(u_1^n, u_0^n) - g_{-\frac{1}{2}}(u_0^n, u_b^n)]$$

On voit dans cette dernière expression que la condition aux limites n'apparaît que comme flux sur la première interface. (voir figure 3.1).

Nous présentons ici formellement la méthode de splitting des opérateurs qu'on utilise pour résoudre (3.1). Les schémas cinétiques peuvent s'écrire en deux étapes distinctes.

- Transport

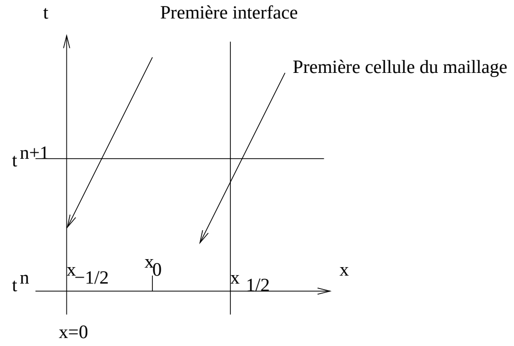


FIG. 3.1 – Le maillage près du bord

Pour discrétiser le système (3.3), on résout d'abord un problème linéaire diagonal par une méthode aussi précise qu'on veut, c'est-à-dire on a

$$\begin{cases} \partial_t f_k + \lambda_k \partial_x f_k = 0 \\ \\ f(0,x) = f^n(x) \end{cases} \tag{3.9}$$

et on y associe un schéma linéaire (1^{er} ordre par exemple) ou non linéaire (méthodes $MUSCL$, $WENO$ ...)
Dans la première partie de ce travail, on utilise la formulation convexe introduite par Harten dans [24], qui vaut aussi bien pour les schémas du premier ordre que pour les schéma $MUSCL$, ce qui donne par exemple, suivant le sens du transport :

$$\begin{cases} \lambda_k > 0 \quad f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - D_{i-\frac{1}{2},k}^n) f_{i,k}^n + D_{i-\frac{1}{2},k}^n f_{i-1,k}^n \\ \\ \lambda_k = 0 \quad f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = f_{i,k}^n \\ \\ \lambda_k < 0 \quad f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - D_{i+\frac{1}{2},k}^n) f_{i,k}^n + D_{i+\frac{1}{2},k}^n f_{i+1,k}^n \end{cases} \tag{3.10}$$

où le coefficient $D_{i+\frac{1}{2},k}^n$ est soit le coefficient de CFL dans le cas du schéma décentré amont classique, où bien ce terme contient des termes non linéaires pour des schémas d'ordre plus élevé. Sur la cellule du bord, on a

$$\begin{cases} \lambda_k > 0 \quad f_{0,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - D_{-\frac{1}{2},k}^n) f_{0,k}^n + D_{-\frac{1}{2},k}^n f_{b,k}^n \\ \\ \lambda_k = 0 \quad f_{0,k}^{n+\frac{1}{2}} = f_{0,k}^n \\ \\ \lambda_k < 0 \quad f_{0,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - D_{\frac{1}{2},k}^n) f_{0,k}^n + D_{\frac{1}{2},k}^n f_{1,k}^n \end{cases} \tag{3.11}$$

$f_{b,k}^n$ est la condition aux limites voulue. On voit que celle-ci n'intervient que sur les composantes qui se déplacent avec une vitesse $\lambda_k > 0$ positive, comme terme de flux sur la première interface.

- Projection
  Ensuite on utilise la solution donnée par le schéma précédent comme condition initiale du système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \partial_t f_k(t) = \frac{1}{\epsilon}(M_k(u) - f_k(t)) \\ \\ f_k(0) = f(0) \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Grâce à la première des deux relations de compatibilité (3.4), on voit que si on somme sur toutes les composantes k, on obtient

$$\partial_t \sum_k f_k(t) = \partial_t u(t) = 0$$

ce qui permet de résoudre explicitement le système différentiel. La solution s'écrit alors

$$f_{i,k}^{n+1} = (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\epsilon}}) M_k(u_i^{n+\frac{1}{2}}) + e^{-\frac{\Delta t}{\epsilon}} f_{i,k}^n \quad \forall i \geq 0, n \geq 1. \tag{3.12}$$

On voit aussi que

$$u_i^{n+1} = \sum_k f_{i,k}^{n+1} = u_i^{n+\frac{1}{2}}.$$

En passant à la limite en ϵ, on voit donc qu'on obtient la projection suivante

$$f_{i,k}^{n+1} = M_k(u_i^{n+\frac{1}{2}}) \quad \forall i \geq 0, n \geq 1 \tag{3.13}$$

Pour la partie collision non linéaire comme pour la partie transport linéaire, les solutions sont explicites.

Pour les données on a :

$$\begin{cases} f_{i,k}^0 = M_k(u_i^0) & \forall i \geq 0 \\ f_{k,b}^n = M_k(u_b^n) & \forall n \in [0, L-1] \end{cases}$$

3.3 Résultats de stabilité

Pour le schéma énoncé ci dessus, nous allons étudier la stabilité $L^\infty \cap L^1 \cap BV$.

3.3.1 Hypothèses

Pour démontrer les résultats qui suivent, nous supposons comme dans le cas continu que les données satisfont

$$\text{(H1)} \quad \begin{cases} u^0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \cap BV(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+) \\ u_b(t) \in L^\infty(0,T) \cap BV(0,T) \cap L^1(0,T) \end{cases} \tag{3.14}$$

De plus, on suppose que les maxwelliennes sont **MND** , c'est-à-dire

$$\text{(H2)} \quad M_k'(u) \geq 0 \ \ \forall u \in I, \quad I =]-\mu_\infty, \mu_\infty[\tag{3.15}$$

avec

$$\mu_\infty = \max(||u_b||_{L^\infty(\mathbb{R}_t^+)}, ||u^0||_{L^\infty(\mathbb{R}_x^+)})$$

et le schéma cinétique (SC) s'écrit

* Transport

$$\begin{cases} \lambda_k > 0 \quad f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - D_{i-\frac{1}{2},k}^n) f_{i,k}^n + D_{i-\frac{1}{2},k}^n f_{i-1,k}^n \\ \lambda_k = 0 \quad f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = f_{i,k}^n & \forall i \geq 0 \\ \lambda_k < 0 \quad f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - D_{i+\frac{1}{2},k}^n) f_{i,k}^n + D_{i+\frac{1}{2},k}^n f_{i+1,k}^n \end{cases}$$

avec

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \sum_k f_{i,k}^n,$$

et

$$\lambda_k > 0 \implies f_{-1,k}^n = M_k(u_b^n).$$

* Projection

$$f_{i,k}^{n+1} = M_k(u_i^{n+\frac{1}{2}}) \quad \forall i \geq 0, n \geq 1$$

On suppose que la partie transport vérifie l'hypothèse suivante

$$\text{(H3)} \quad \forall i, n, k \quad D_{i-\frac{1}{2},k}^n \in [0,1] \tag{3.16}$$

3.3.2 Stabilité L^∞

Proposition 3.3.1 *Sous les hypothèses (H1)-(H3), les schéma cinétiques (SC) sont L^∞ stable.*

Preuve : La démonstration se fait par récurrence. Pour $n = 0$, on a

$$-\mu_\infty \leq u_i^0 \leq \mu_\infty \quad \forall i \geq 0$$

et

$$-\mu_\infty \leq u_b^n \leq \mu_\infty \quad \forall n \geq 0$$

par hypothèse. Ces encadrements donnent, grâce à la propriété **MND** des maxwelliennes, pour tout $i \geq 0$,

$$M_k(-\mu_\infty) \leq M_k(u_i^0) = f_i^0 \leq M_k(\mu_\infty).$$

et

$$M_k(-\mu_\infty) \leq M_k(u_b^n) \leq M_k(\mu_\infty).\forall n \geq 0$$

Maintenant, on suppose que

$$M_k(-\mu_\infty) \leq f_{i,k}^n \leq M_k(\mu_\infty). \quad \forall i \geq 0$$

Alors par convexité du transport, on a, pour tout $i \geq 0$:

$$(1-D_{i-\frac{1}{2},k}^n)M_k(-\mu_\infty)+D_{i-\frac{1}{2},k}^n M_k(-\mu_\infty) \leq f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} \leq (1-D_{i-\frac{1}{2},k}^n)M_k(\mu_\infty)+D_{i-\frac{1}{2},k}^n M_k(\mu_\infty),$$

pour les composantes à vitesse positive, par exemple. Ceci donne

$$M_k(-\mu_\infty) \leq f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} \leq M_k(\mu_\infty).$$

Parce que $u_i^{n+\frac{1}{2}} = \sum_k f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}}$ on a

$$-\mu_\infty \leq u_i^{n+\frac{1}{2}} \leq \mu_\infty.$$

Et parce que $f_{i,k}^{n+1} = M_k(u_i^{n+\frac{1}{2}})$ on a

$$M_k(-\mu_\infty) \leq f_{i,k}^{n+1} \leq M_k(\mu_\infty).$$

ce qui termine la preuve. $\diamondsuit$

3.3.3 Variation totale sur $\mathbb{R}^+$

Dans cette partie réside, en fait, la difficulté majeure, parce que spécifiquement liée au problème avec bord. Car, pour le problème de Cauchy, lorsqu'on applique la formule de Green-Gauss, il n'y a pas de termes de bord qui apparaissent. Ici, ces termes doivent être bornés à leur tour, pour garantir les estimations de l'intérieur du domaine. Dans ce chapitre les résultats obtenus ne dérivent pas d'une discrétisation des estimations obtenues dans le cas continu du chapitre précédent. Bien au contraire, on n'utilise pas la forme complète du schéma qui équivaudrait à utiliser l'équation sur le bord, mais on obtient ces estimations grâce, à une relation d'entropie sur les termes du bord.

Dans ce paragraphe nous allons d'abord montrer que la variation totale de la solution donnée par le schéma n'est pas fonction de la variation totale le long du bord, comme cela a été le cas dans [39], mais que cette dernière ne sert que pour des arguments de convergence qui seront explicités plus bas.

Proposition 3.3.2 *Sous les hypothèses (H1)-(H3), on a*

$$TV(u_\Delta^{n+1}) = TV(f_\Delta^{n+1}) \leq TV(u^0) + TV(u_b) + |u_0^0 - u_b^0|$$

où $TV(f^{n+1}) = \sum_k TV(f_k^{n+1})$.

Preuve :

1 Collision

Par la propriété **MND** des maxwelliennes, il est clair que

$$TV(u_\Delta^{n+1}) = TV(f_\Delta^{n+1}) \le TV(f_\Delta^{n+\frac{1}{2}})$$

2 Transport

. $\lambda_k > 0$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^\infty |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}| &\le \textstyle\sum_{i=1}^\infty (1 - D_{i-\frac{1}{2},k}^n)|f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n| \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^\infty D_{i-\frac{1}{2},k}^n |f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n| + D_{-\frac{1}{2},k}^n |f_{0,k}^n - M_k(u_b^n)| \\ &\le \textstyle\sum_{i=1}^\infty |f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n| + D_{-\frac{1}{2},k}^n |f_{0,k}^n - M_k(u_b^n)| \end{aligned}$$

. $\lambda_k < 0$ De la même façon,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^\infty |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}| &\le \textstyle\sum_{i=1}^\infty (1 - D_{-\frac{1}{2},k}^n)|f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n| \\ &+ \textstyle\sum_{i=2}^\infty D_{-\frac{1}{2},k}^n |f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n| \\ &\le \textstyle\sum_{i=1}^\infty |f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n| - D_{\frac{1}{2},k}^n |f_{1,k}^n - f_{0,k}^n| \end{aligned}$$

. $\lambda_k = 0$

$$\sum_{i=1}^\infty |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,k}^{n+\frac{1}{2}}| = \sum_{i=1}^\infty |f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n|$$

La variation totale de la partie transport peut être réécrite comme

$$\sum_k TV(f_k^{n+\frac{1}{2}}) \le \sum_k TV(f_k^n) + \sum_{\lambda_k>0} D_{-\frac{1}{2},k}^n |f_{0,k}^n - M_k(u_b^n)| - \sum_{\lambda_k<0} D_{\frac{1}{2},k}^n |f_{1,k}^n - f_{0,k}^n|$$

Le pas de temps complet se résume donc à l'inégalité suivante

$$TV(f^{n+1}) \le TV(f_k^n) + \sum_{\lambda_k>0} D_{-\frac{1}{2},k}^n |f_{0,k}^n - M_k(u_b^n)| - \sum_{\lambda_k<0} D_{\frac{1}{2},k}^n |f_{1,k}^n - f_{0,k}^n|. \tag{3.17}$$

Pour montrer que l'on controle les termes de bord apparus dans l'estimation précédente, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *Sous les hypothèses (H1)-(H3), on a*

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\lambda_k>0} D_{-\frac{1}{2},k}^n |f_{0,k}^n - M_k(u_b^n)| \quad &- \textstyle\sum_{\lambda_k<0} D_{\frac{1}{2},k}^n |f_{1,k}^n - f_{0,k}^n| \le \\ &\textstyle\sum_k |f_{0,k}^n - M_k(u_b^{n-1})| - \sum_k |f_{0,k}^{n+1} - M_k(u_b^n)| + |u_b^n - u_b^{n-1}| \end{aligned}$$

Preuve : Parce que les maxwelliennes vérifient la propriété **MND** , on a

$$\sum_k |f_0^{n+1} - M_k(c)| = \sum_k |M_k(u_0^{n+\frac{1}{2}}) - M_k(c)| = |u_0^{n+\frac{1}{2}} - c| \le \sum_k |f_0^{n+\frac{1}{2}} - M_k(c)|$$

quel que soit $c \in \mathbb{R}$, ce qui explique que

$$\sum_k |f_{0,k}^{n+1} - M_k(c)| \le \sum_k |f_{0,k}^{n+\frac{1}{2}} - M_k(c)|$$

Ici, en prenant $c = u_b^n$, on a que

$$\sum_k |f_{0,k}^{n+1} - M_k(u_b^n)| \le \sum_k |f_{0,k}^{n+\frac{1}{2}} - M_k(u_b^n)|$$

Tandis que pour la partie transport, on a

$$\begin{aligned}
\sum_k |f_{0,k}^{n+\frac{1}{2}} - M_k(u_b^n)| &\leq \sum_{\lambda_k>0} |(1 - D^n_{-\frac{1}{2},k})f^n_{0,k} + D^n_{-\frac{1}{2},k} M_k(u_b^n) - M_k(u_b^n)| \\
&+ \sum_{\lambda_k\leq 0} |(1 - D^n_{\frac{1}{2},k})f^n_{0,k} + D^n_{\frac{1}{2},k} f^n_{1,k} - M_k(u_b^n)| \\
&\leq \sum_{\lambda_k>0} (1 - D^n_{-\frac{1}{2},k})|f^n_{0,k} - M_k(u_b^n)| \\
&+ \sum_{\lambda_k\leq 0} \left[D_{\frac{1}{2},k}|f^n_{0,k} - f^n_{1,k}| + |f^n_{0,k} - M_k(u_b^n)|\right] \\
&\leq \sum_k |f^n_{0,k} - M_k(u_b^n)| \\
&+ \sum_{\lambda_k<0} D_{\frac{1}{2},k}|f^n_{0,k} - f^n_{1,k}| - \sum_{\lambda_k>0} D_{-\frac{1}{2},k}|f^n_{0,k} - M_k(u_b^n)| \\
&\leq \sum_k |f^n_{0,k} - M_k(u_b^{n-1})| + \sum_k |M_k(u_b^n) - M_k(u_b^{n-1})| \\
&+ \sum_{\lambda_k<0} D_{\frac{1}{2},k}|f^n_{0,k} - f^n_{1,k}| - \sum_{\lambda_k>0} D_{-\frac{1}{2},k}|f^n_{0,k} - M_k(u_b^n)|,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\diamondsuit$
Grâce au dernier résultat, (3.17) devient,

$$TV(f^{n+1}) \leq TV(f^n) + \sum_k |f^n_{0,k} - M_k(u_b^{n-1})| - \sum_k |f^{n+1}_{0,k} - M_k(u_b^n)| + |u_b^n - u_b^{n-1}|.$$

Si on somme sur n, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_k TV(f_k^{n+1}) &\leq \sum_k TV(f_k^1) + \sum_k |f^1_{0,k} - M_k(u_b^0)| - \sum_k |f^{n+1}_{0,k} - M_k(u_b^n)| + \sum_{p=1}^n |u_b^p - u_b^{p-1}|, \\
&\leq \sum_k TV(f_k^1) + \sum_k |f^1_{0,k} - M_k(u_b^0)| + \sum_{p=1}^n |u_b^p - u_b^{p-1}|
\end{aligned}$$

Si on applique (3.17) pour $n = 0$, on a

$$TV(f^1) \leq TV(f^0) + \sum_{\lambda_k>0} D^0_{-\frac{1}{2},k}|f^0_{0,k} - M_k(u_b^0)| - \sum_{\lambda_k<0} D^0_{\frac{1}{2},k}|f^0_{0,k} - M_k(u_b^0)|.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\sum_k |f^1_{0,k} - M_k(u_b^0)| &\leq \sum_{\lambda_k>0} |(1 - D^0_{-\frac{1}{2},k})f^0_0 + D^0_{-\frac{1}{2},k} M_k(u_b^0) - M_k(u_b^0)| \\
&+ \sum_{\lambda_k<0} |(1 - D^0_{\frac{1}{2},k})f^0_0 + D^0_{\frac{1}{2},k} f^0_{1,k} - M_k(u_b^0)| \\
&\leq \sum_{\lambda_k>0} (1 - D^0_{-\frac{1}{2},k})|f^0_0 - M_k(u_b^0)| \\
&+ \sum_{\lambda_k<0} |f^0_0 - M_k(u_b^0)| + D^0_{\frac{1}{2},k}|f^0_{1,k} - f^0_0|
\end{aligned}$$

Grâce à ces deux observations, l'estimation sur la variation totale devient exactement

$$TV(f_k^{n+1}) \leq TV(f_k^0) + \sum_k |f^0_{0,k} - M_k(u_b^0)| + TV(u_b).$$

Nous avons projeté la condition initiale sur la surface d'équilibre, ce qui explique que

$$\sum_k |f^0_{0,k} - M_k(u_b^0)| = \sum_k |M_k(u_0^0) - M_k(u_b^0)| = |u_0^0 - u_b^0|$$

ce qui termine la preuve. $\diamondsuit$

3.3.4 Estimations $L^1(\mathbb{R}^+)$

Nous montrons ici comment utiliser la stabilité TV pour établir les estimations L^1.

Lemme 3.3.2 *Si les hypothèses (H1)-(H3) sont vérifiées, les schémas cinétiques (SC), sont L^1 stables :*

$$||u_\Delta^{n+1}||_{L^1(\mathbb{R}^+)} = ||f_\Delta^{n+1}||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq ||u^0||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + C'||u_b||_{L^1(0,T)} + T\ C\ K$$

où $C' = \sup_k |\lambda_k|$, *et* $K = (TV(u^0,\mathbb{R}^+) + TV(u_b,(0,T)) + |u_0^0 - u_b^0|)$.

Preuve :

1 Partie transport

$\lambda_k > 0$ Pour les composantes à vitesse positive, on voit que

$$|f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}}| \leq |f_{i,k}^n| + D_{i-\frac{1}{2},k}^n |f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n|$$

pour tout $i \geq 1$, tandis que

$$|f_{0,k}^{n+\frac{1}{2}}| \leq (1 - D_{-\frac{1}{2},k}^n)|f_{i,k}^n| + D_{-\frac{1}{2},k}|M_k(u_b^n)|.$$

Donc, après avoir sommé sur i, on obtient

$$\sum_{i\geq 0} |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}}| \leq \sum_{i\geq 0} |f_{i,k}^n| + TV(f_{i,k}^n) + |M_k(u_b^n)|.$$

$\lambda_k < 0$ Pour les caractéristiques sortantes le bord n'influençant pas le transport, on a pour tout $i \geq 0$

$$|f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}}| \leq |f_{i,k}^n| + D_{i+\frac{1}{2},k}^n |f_{i,k}^n - f_{i+1,k}^n|,$$

donc pour l'étape complète, on a

$$\sum_k ||f_k^{n+\frac{1}{2}}||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \sum_k ||f_k^n||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + \Delta x \sum_k TV(f_k^n) + \Delta x \sum_{\lambda_k > 0} |M_k(u_b^n)|$$

qui donne,

$$||u_\Delta^{n+\frac{1}{2}}||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq ||u_\Delta^n||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + \Delta x TV(u^n,\mathbb{R}^+)) + \Delta x \sum_{\lambda_k > 0} |M_k(u_b^n)|$$

car

$$\begin{cases} ||u_\Delta^{n+\frac{1}{2}}||_{L1(\mathbb{R}^+)} \leq ||f_\Delta^{n+\frac{1}{2}}||_{L1(\mathbb{R}^+)} \\ ||u_\Delta^n||_{L1(\mathbb{R}^+)} = ||f_\Delta^n||_{L1(\mathbb{R}^+)} \end{cases}$$

la dernière égalité est due à la propriété **MND** des maxwelliennes.

2 Partie collision

Parce que l'opérateur est contractant dans L^1, et par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} ||u_\Delta^{n+1}||_{L^1(\mathbb{R}^+)} &= ||f_\Delta^{n+1}||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \\ &= ||u_\Delta^{n+\frac{1}{2}}||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq ||f_\Delta^{n+\frac{1}{2}}||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq ||u^0||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + C'||u_b||_{L^1(0,T)} + Cn\Delta x K \end{aligned}$$

où $K = \left(TV(u^0) + TV(u_b) + |u_0^0 - u_b^0|\right)$. Parce que $n \leq \frac{T}{\Delta t}$, $n\Delta x$ est plus petit qu'une certaine constante, ce qui termine la preuve.

$\diamondsuit$

Lemme 3.3.3 *Soit u_Δ une solution donnée par le schéma (SC), si (H1)-(H3) sont vraies, u_Δ est équicontinue en temps, c'est-à-dire :*

$$||u_\Delta^{n+1} - u_\Delta^n||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq C\Delta x$$

avec $C = (TV(u^0, \mathbb{R}^+) + TV(u_b^n, (0,T)) + |u_0^0 - u_b^0|) + 2\mu_\infty$

Preuve : Pour la partie transport, on a :

$\lambda_k > 0$ Pour les composantes dont la vitesse est positive, pour $i \geq 1$, on écrit

$$\begin{aligned} |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^n| &\leq D_{i-\frac{1}{2}}^n |f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n| \\ &\leq |f_{i,k}^n - f_{i-1,k}^n| \end{aligned}$$

et pour la cellule au bord, on a

$$|f_{0,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{0,k}^n| \leq |f_{0,k}^n - M_k(u_b^n)| \leq 2\mu_\infty.$$

En sommant sur $i \geq 0$, on a que

$$\sum_{i\geq 0} |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^n| \leq TV(f_k^n, \mathbb{R}^+) + 2\mu_\infty$$

$\lambda_k \leq 0$ Tandis que sur les autres composantes, on a pour tout $i \geq 0$

$$\begin{aligned} |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^n| &\leq D_{i+\frac{1}{2}}^n |f_{i,k}^n - f_{i+1,k}^n| \\ &\leq |f_{i,k}^n - f_{i+1,k}^n| \end{aligned}$$

Donc au total, on a :

$$\begin{aligned} ||u_\Delta^{n+1} - u_\Delta^n||_{L^1(\mathbb{R}^+)} &= \Delta x \textstyle\sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n| = \Delta x \sum_i |u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_i^n| \leq \Delta x (\sum_{i,k} |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^n|) \\ &\leq \Delta x (\textstyle\sum_k TV(f_k^n, \mathbb{R}^+) + 2\mu_\infty) = \Delta x (TV(u_\Delta^n, \mathbb{R}^+) + 2\mu_\infty) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

3.3.5 Résultats de convergence

En utilisant les résultats précédents, on peut montrer l'équicontinuité en temps :

Lemme 3.3.4 *Sous les hypothèses (H1)-(H3), si u est une solution numérique fournie par le schéma (SC), alors*

$$\forall t, t' \in [0,T] \ \ ||u_\Delta(t) - u_\Delta(t')||_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq C(TV(u^0) + TV(u_b) + 2\mu_\infty)(\Delta t + |t - t'|) \tag{3.18}$$

Preuve : En utilisant le lemme 3.3.3, on a :

$$||u^m - u^n||_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq C\Delta x |m - n| K \leq C'(|t^m - t^n| + \Delta t) K$$

avec $K = (TV(u^0, \mathbb{R}^+) + CTV(u_b, (0,T)) + 2\mu_\infty)$. $\diamondsuit$

Théorème 3.3.1 *Soit $T > 0$, $\epsilon = 0$, supposons que les hypothèses (H1)-(H3) soient satisfaites pour (u^0, u_b). Supposons que la partie transport soit TVD stable. Pour tout $T > 0$, on suppose que $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ reste constante. Quand $\Delta t \to 0$, la suite u_Δ converge dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$ vers la solution u de (3.1), $u \in C^0([0,T], \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+))$.*

Preuve : On reprend ici les éléments de la démonstration de Harten [24]. A l'aide de la proposition 3.3.1, on sait que

$$\forall n \in 1,\ldots,\mathrm{L} \quad ||u_\Delta^n||_{L^\infty} \leq \mu_\infty$$

où $\mu_\infty = \max(||u_b||_{L^\infty(0,T)}, ||u^0||_{L^\infty(\mathbb{R}^+)})$. la proposition 3.3.2 donne

$$TV(u_\Delta^{n+1}) \leq TV(u_\Delta^0, \mathbb{R}^+) + TV(u_{b,\Delta},(0,T)) + |u_\Delta^0(0) - u_{b,\Delta}(0)|$$

or

$$\begin{aligned}
TV(u_\Delta^0) &= \sum_{i\geq 0} |u_{i+1}^0 - u_i^0| = \frac{1}{\Delta x}\sum_{i\geq 0} |\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (u^0(x+\Delta x) - u^0(x))\, dx| \\
&\leq \sum_{i\geq 0} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{|u^0(x+\Delta x) - u^0(x)|}{\Delta x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{|u^0(x+\Delta x) - u^0(x)|}{\Delta x}\, dx \\
&\leq TV(u^0, \mathbb{R}^+)
\end{aligned}$$

et on peut faire la même majoration pour la condition aux limites. Pour les termes de bord, qui dépendent eux aussi de la discrétisation, on majore simplement

$$|u_\Delta^0(0) - u_{b,\Delta}(0)| \leq 2\mu_\infty \quad \forall \Delta \geq 0$$

Si on définit la norme $||\cdot||_{b+tv}$ par

$$||v||_{Z(\mathbb{R}^+)} = ||v||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + TV(v, \mathbb{R}^+)$$

alors d'après les arguments précédents,

$$||u_\Delta(t,\cdot)||_{Z(\mathbb{R}^+)} \leq C$$

avec C une constante indépendante du paramètre de discrétisation Δ. Cette observation nous permet, par compacité, d'extraire pour tout t fixé une sous-suite convergente dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Par un procédé diagonal, on peut construire une sous-suite convergente dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ pour tout t rationnel. En utilisant le lemme 3.3.4, on conclut que cette sous-suite converge, dans $L^\infty(0,T; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+))$, vers une limite qu'on appelle $u(t,x)$. De façon évidente $u(t,x)$ est uniformément bornée, inégrable et à variation bornée en x.

Par des propriétés de régularité et de consistance des flux numériques avec la fonction flux F de (3.1), on prouve, en utilisant des arguments du type de ceux du théorème de Lax-Wendroff [35], que :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} u \cdot \partial_t \phi + F(u) \cdot \partial_x \phi = 0$$

par passage à la limite. On peut conclure par la consistance de la solution avec la condition initiale, pour s'en convaincre il suffit d'utiliser la propriété d'équicontinuité démontrée dans le lemme 3.3.4 qui donne :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \int_K |u(t,x) - u^0(x)|\, dx = 0 \quad \forall K \text{ compact de } \mathbb{R}^+$$

ce qui termine la preuve. ♢

3.4 Approximation du premier ordre (PO) en espace: convergence et unicité

Dans cette partie, on se restreint aux schémas du premier ordre en temps et en espace, c'est-à-dire :

$$D_{i-\frac{1}{2},k}^n = \xi_k = |\lambda_k| \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Grâce à la partie précédente, on peut affirmer le théorème suivant :

Théorème 3.4.1 *Si les hypothèses (H1)-(H3) sont vérifiées c'est-à-dire en particulier si :*

$$0 \leq \xi_k \leq 1 \ \ \forall k = \{1, \dots, N\}$$

alors

$$u_\Delta \to u \ \ dans \ L^\infty([0,T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+))$$

et

$$u \in C^0([0,T], L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+))$$

avec u est une solution faible de (3.1).

Pour démontrer que la solution fournie par les schéma du premier ordre, converge vers l'unique solution entropique de (3.1),quand $\Delta x \to 0$, on applique les arguments de la démonstration du théorème de Lax-Wendroff. Cette démonstration est nécessaire, car le bord du domaine introduit de nouveaux termes, dont il faut s'assurer la convergence. Pour montrer la consistance du bord avec les conditions d'entropie énoncées dans [5], nous avons besoin d'estimer la trace de la solution en norme BV.

Lemme 3.4.1 *Sous les hypothèses (H1)-(H3), on a*

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{\lambda_k<0} \xi_k |M_k(u_0^p) - M_k(u_0^{p-1})| \leq TV(u_b, (0,T)) + TV(u^0, \mathbb{R}^+) + |u_0^0 - u_b^0|$$

Preuve : Comme pour les autres démonstrations nous allons utiliser la convexité de la valeur absolue et la formulation convexe du transport.

. $\lambda_k > 0$

$$|f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^{n-\frac{1}{2}}| \leq (1-\xi_k)|f_{i,k}^n - f_{i,k}^{n-1}| + \xi_k |f_{i-1,k}^n - f_{i-1,k}^{n-1}|$$

ce qui donne quand on somme sur toutes les mailles

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^{n-\frac{1}{2}}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |f_{i,k}^n - f_{i,k}^{n-1}| + \xi_k |M_k(u_b^n) - M_k(u_b^{n-1})|$$

. $\lambda_k < 0$

$$|f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^{n-\frac{1}{2}}| \leq (1-\xi_k)|f_{i,k}^n - f_{i,k}^{n-1}| + \xi_k |f_{i+1,k}^n - f_{i+1,k}^{n-1}|$$

de même que pour les composantes à vitesse positive,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^{n-\frac{1}{2}}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |f_{i,k}^n - f_{i,k}^{n-1}| - \xi_k |M_k(u_0^n) - M_k(u_0^{n-1})|$$

. $\lambda_k = 0$

$$|f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^{n-\frac{1}{2}}| = |f_{i,k}^n - f_{i,k}^{n-1}|$$

Ce qui pour la partie transport donne :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i,k} |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^{n-\frac{1}{2}}| \quad &\leq \textstyle\sum_{i,k} |f_{i,k}^n - f_{i,k}^{n-1}| \\ &+ \textstyle\sum_{\lambda_k>0} \xi_k |M_k(u_b^n) - M_k(u_b^{n-1})| - \sum_{\lambda_k<0} \xi_k |M_k(u_0^n) - M_k(u_0^{n-1})| \end{aligned}$$

Pour la projection on a encore

$$\sum_k |f_{i,k}^{n+1} - f_{i,k}^n| \leq \sum_k |f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,k}^{n-\frac{1}{2}}| \quad \forall i \geq 0$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\lambda_k<0} \xi_k |M_k(u_0^n) - M_k(u_0^{n-1})| \quad &\leq |u_b^n - u_b^{n-1}| \\ &+ \textstyle\sum_{i,k} |f_{i,k}^n - f_{i,k}^{n-1}| - \sum_{i,k} |f_{i,k}^{n+1} - f_{i,k}^n| \end{aligned}$$

Ce qui par sommation donne

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{\lambda_k<0}\xi_k|M_k(u_0^p)-M_k(u_0^{p-1})|\leq TV(u_b,(0,T))+\sum_{i,k}|f_{i,k}^1-f_{i,k}^0|$$

or

$$\sum_{i,k}|f_{i,k}^1-f_{i,k}^0|=\sum_{i,k}|M_k(u_i^{\frac{1}{2}})-M_k(u_i^0)|=\sum_{i}|u_i^{\frac{1}{2}}-u_i^0|$$

et ceci se majore par

$$\sum_{i}|u_i^{\frac{1}{2}}-u_i^0|\leq TV(u^0,\mathbb{R}^+)+|u_0^0-u_b^0|$$

$\diamondsuit$

Si on pose,

$$\omega_{\Delta,k}=(\omega_k^n)_{1\leq n\leq L}=(M_k(u_0^n))_{1\leq n\leq L}\ \ \forall k \text{ t.q. } \lambda_k\leq 0$$

alors le dernier lemme et le lemme 3.3.2 montrent que

Corollaire 3.4.1 *Indépendamment du pas de discrétisation, $\{\omega_{\Delta,k},\ \lambda_k\leq 0,\ \Delta x\geq 0\}$ est bornée dans $L^1\cap BV(\mathbb{R}^+)$. Et on peut donc extraire une sous-suite convergente dans $L^1(0,T)$ quand Δt tend vers 0. On appelle ω_k la limite de la sous-suite extraite dans $L^1(0,T)$.*

Pour relier les entropies associées aux variables microscopiques à celle macroscopique donnée avec la loi de conservation nous rappelons ici les résultats de François Bouchut adaptés au cas scalaire. La loi de conservation scalaire (3.1) connait au moins une entropie strictement convexe (qui est $\eta(u)=\frac{u^2}{2}$). Dans ce cas, d'après [7]

Théorème 3.4.2 *Soit S une entropie strictement convexe, la condition*

$$M_k'>0\ \ \forall k\in\{1,\ldots,N\}$$

est équivalente à l'existence d'entropies microscopiques S_k satisfaisant les propritétés suivantes

(P1) S_k convexe sur $M_k(I)$ l'image par M_k du compact I

(P2)

$$\sum_k S_k(M_k(u))=S(u)$$

pour tout $u\in I$.

(P3) Soit u un réel donné, alors quel que soit le vecteur $(f_k)_{k\in\{1,\ldots,N\}}$ tel que $\sum_k f_k=u$, on a l'équivalent discret du h-théorème

$$S(u)=\sum_k S_k(M_k(u))\leq\sum_k S_k(f_k)$$

Ce résultat généralise à toutes les entropies, les résultats déjà observés dans [38] sur l'entropie de Kružkov associée à (3.1). Nous avons pour tous les schémas cinétiques du premier ordre les relations d'entropie discrètes suivantes

Lemme 3.4.2 *Sous les hypothèses (H1)-(H3), on a :*

$$S(u_i^{n+1})-S(u_i^n)+\frac{\Delta t}{\Delta x}[G_{i+\frac{1}{2}}^n-G_{i-\frac{1}{2}}^n]\leq 0$$

où

$S(u)=\sum_k S_k(M_k(u))$

et

$$G_{i+\frac{1}{2}}^n=G(u_{i+1}^n,u_i^n)=\{\textstyle\sum_{\lambda_k>0}\lambda_kS_k(M_k(u_{i,k}^n))+\sum_{\lambda_k<0}\lambda_kS_k(M_k(u_{i+1,k}^n))\}$$

avec, sur l'interface $x_{-\frac{1}{2}}$,

$$G_{-\frac{1}{2}}^n=G(u_0^n,u_b^n)$$

Preuve : On utilise la formulation convexe du schéma amont, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\lambda_k > 0 \quad S_k(f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}}) \leq S_k(f_{i,k}^n)(1-\xi_k) + \xi_k S_k(f_{i-1,k}^n) \\ &\lambda_k = 0 \quad S_k(f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}}) = S_k(f_{i,k}^n) \\ &\lambda_k < 0 \quad S_k(f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} \leq S_k(f_{i,k}^n)(1-\xi_k) + \xi_k S_k(f_{i+1,k}^n), \end{aligned} \tag{3.19}$$

En additionnant toutes les composantes,

$$\sum_k S_k(f_i^{n+\frac{1}{2}}) - \sum_k S_k(f_i^n) \leq -\sum_{\lambda_k>0} \xi_k(S_k(f_{i,k}^n) - S_k(f_{i-1,k}^n)) - \sum_{\lambda_k<0} (S_k(f_{i,k}^n) - S_k(f_{i+1,k}^n)) \tag{3.20}$$

Et parce que $S_k(f_i^n) = S_k(M_k(u_i^n))$, (propriété (P2) du théorème 3.4.2),

$$S(u_i^n) = \sum_k S_k(f_i^n).$$

Par définition de $G_{i+\frac{1}{2}}^n$, on obtient

$$-\sum_{\lambda_k>0} \xi_k(S_k(f_{i,k}^n) - S_k(f_{i-1,k}^n)) + \sum_{\lambda_k<0} \xi_k(S_k(f_{i,k}^n) - S_k(f_{i+1,k}^n)) = -\frac{\Delta t}{\Delta x}[G_{i+\frac{1}{2}}^n - G_{i-\frac{1}{2}}^n].$$

Parce que les maxwelliennes sont monotones, elles minimisent la somme des entropies microscopiques pour un état donné, (propriété (P3) du théorème 3.4.2):

$$S(u_i^{n+1}) = \sum_k S_k(f_{i,k}^{n+1}) \leq \sum_k S_k(f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}}) \tag{3.21}$$

En utilisant cette estimation dans (3.20), on obtient le résultat désiré. $\diamondsuit$
Ensuite nous étendons les techniques du théorème de Lax-Wendroff au cas des schémas cinétiques avec bord.

Lemme 3.4.3 *Quand Δx, le pas de discrétisation tend vers 0, avec $\frac{\Delta t}{\Delta x} = C^{ste}$, on obtient l'inégalité d'entropie suivante :*

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}_+} S(u)\partial_t\phi + G(u)\partial_x\phi \; dt \; dx + \sum_{\lambda_k>0} \lambda_k \int_{(0,T)} S_k(M_k(u_b(t)))\phi(t,0) \; dt$$
$$+ \sum_{\lambda_k<0} \lambda_k \int_{(0,T)} S_k(\omega_k)\phi(t,0) \; dt + \int_{\mathbb{R}_+} S(u^0(x))\phi(0,x) \; dx \geq 0$$

où ω_k est la limite obtenue sur les termes de bord pour les caractéristiques sortantes définie par le corollaire 3.4.1, et ϕ une fonction test positive telle que $\phi \in C_0^1([0,T[\times\mathbb{R}^+)$.

Preuve : Soit ϕ_i^n l'approximation par des constantes par maille d'une fonction test positive dans $C_0^1([0,T)\times\mathbb{R}^+)$, telle que:

$$\phi_i^n = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi(x,t) \; dt \; dx$$

On multiplie l'inégalités d'entropie par ϕ_i^n,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{L} (S(u_i^{n+1}) - S(u_i^n))\phi_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{L} (G_{i+\frac{1}{2}}^n - G_{i-\frac{1}{2}}^n)\phi_i^n \leq 0$$

Une intégration par parties donne dans le premier membre les termes standard:

$$-\Delta x \sum_{i=0}^{\infty} S(u_i^{L+1})\phi_i^L + \Delta x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{L} S(u_i^n)(\phi_i^n - \phi_i^{n-1}) + \Delta x \sum_{i=0}^{\infty} S(u_i^0)\phi_i^0$$
$$+ \Delta t \sum_{n=0}^{L} \sum_{i=0}^{\infty} G_{i+\frac{1}{2}}(\phi_{i+1}^n - \phi_i^n) + \Delta t \sum_{n=0}^{L} G_{\frac{1}{2}}^n \phi_0^n \geq 0$$

Le premier terme est nul car le support de la fonction test ne contient pas T par définition, et l'expression se réécrit sous forme intégrale.

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_0^T S(u_\Delta)\frac{\phi_\Delta(t,x)-\phi_\Delta(t-\Delta t,x)}{\Delta t}\,dt\,dx + \int_{\mathbb{R}^+} S(u_\Delta(0,x))\phi_\Delta(0,x)\,dx$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^+} G_\Delta(t,x)\frac{(\phi_\Delta(t,x+\Delta x)-\phi_\Delta(t,x))}{\Delta x}dx\,dt + \int_0^T G_\Delta(t,\tfrac{\Delta x}{2})\phi_\Delta(t,\tfrac{\Delta x}{2})\,dt \geq 0$$

où

$$G_\Delta(t,x) = \sum_{\lambda_k>0}\lambda_k S_k(M_k(u_\Delta(t,x))) + \sum_{\lambda_k<0}\lambda_k S_k(M_k(u_\Delta(t,x+\Delta x)))$$

Grâce aux arguments de convergence établis précédemment, on peut extraire une sous-suite qui converge formement dans $L^\infty(0,T;L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+))$, lorsque Δx tend vers 0, et grâce à la régularité des fonctions test, l'expression précédente tend vers

$$\int_0^\infty\int_0^T S(u)\partial_t\phi\,dt\,dx \quad +\int_0^\infty S(u(0,x))\phi(0,x)\,dx$$

$$+\int_0^T\int_0^\infty G(t,x)\partial_x\phi dx\,dt + \int_0^T G_b(t,0)\phi(t,0)\,dt \geq 0$$

où

$$G(t,x) = \sum_k \lambda_k S_k(M_k(u(t,x)))$$

et

$$G_b(t,0) = \sum_{\lambda_k>0}\lambda_k S_k(M_k(u_b(t))) + \sum_{\lambda_k<0}\lambda_k S_k(\omega_k)$$

Et le dernier terme est obtenu par extraction d'une sous-suite convergente dans le corollaire 3.4.1. ♢

On rappelle le lemme suivant déjà utilisé dans le premier chapitre

Lemme 3.4.4 *Si on pose $S_k(f_k) = |f_k - M_k(c)|$, l'entropie microscopique associée à l'entropie de Kružkov pour l'équation scalaire (3.1), on a*

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{\lambda_k>0}\lambda_k|M_k(u_b)-M_k(c)| + \sum_{\lambda_k<0}\lambda_k|f_k - M_k(c)|\\ &\leq \operatorname{sgn}(u_b-c)[\textstyle\sum_{\lambda_k>0}\lambda_k M_k(u_b) + \sum_{\lambda_k<0}\lambda_k f_k - F(c)]\end{aligned} \tag{3.22}$$

Théorème 3.4.3 *Soient $u^0 \in BV(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R}^+)\cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $u_b \in BV(0,T)\cap L^1(0,T)\cap L^\infty(0,T)$. Alors la solution u_Δ fournie par le schéma cinétique du premier ordre (3.8) tend dans $L^\infty((0,T),L^1(\mathbb{R}^+))$ vers l'unique solution entropique du problème (3.1) qui satisfait*

$$\int_{\mathbb{R}+\times(0,T)}|u-c|\partial_t\phi \quad +\operatorname{sgn}(u-c)(F(u)-F(c))\partial_x\phi dxdt + \int_{\mathbb{R}_+} u(x,0)\phi(x,0)dx$$

$$+\int_0^T \operatorname{sgn}(u_b(t)-c)(F(u(t,0))-F(c))\phi(t,0)\,dt \geq 0$$

pour toute fonction test positive $\phi \in C_0^2([0,T]\times\mathbb{R}_x^+)$, et tout réel c.

Preuve :

On applique le lemme 3.4.3 en l'appliquant à l'entropie de Kružkov et en utilisant le lemme 3.4.4, il vient

$$\begin{aligned}&\int_{(0,T)\times\mathbb{R}_+}\textstyle\sum_k |u-c|\partial_t\phi + \operatorname{sgn}(u-c)(F(u)-F(c))\partial_x\phi\,dt\,dx + \int_{\mathbb{R}_+}|u^0(x)-c|\phi\,dx\\ &+\int_{(0,T)}\operatorname{sgn}(u_b-c)[\textstyle\sum_{\lambda_k>0}\lambda_k M_k(u_b) + \sum_{\lambda_k<0}\lambda_k\omega_k - F(c)]\phi\,dt \geq 0\end{aligned} \tag{3.23}$$

En prenant la fonction test particulière

$$\phi(t,x) = \rho(t)\max\{0,1-\frac{x}{\eta}\}, \qquad \eta\in\mathbb{R}^+\ ,$$

cette fonction n'est pas C^1, mais en la régularisant on peut démontrer les mêmes résultats. Aussi dans un souci de simplicité nous utilisons la précédente fonction, et on obtient :

$$\int_0^T \operatorname{sgn}(u(t,0)-c)(F(u(t,0))-F(c))\rho(t)dt$$

$$\leq \int_0^T \operatorname{sgn}(u_b(t)-c)[\textstyle\sum_{\lambda_k>0}\lambda_k M_k(u_b)+\sum_{\lambda_k<0}\lambda_k\omega_k(t)-F(c)]\rho(t)dt,$$

en laissant η tendre vers zéro. La solution u est $BV(\mathbb{R}_t^+\times\mathbb{R}_x^+)\cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_t^+\times\mathbb{R}_x^+)$ donc par le lemme des traces de [5], on peut définir la trace u et on sait que $\gamma u(t)=u(t,0)$ est dans $L^1(0,T)$.

Ceci étant vrai pour toute fonction test sur $[0,T]$, le résultat est vrai presque partout en t et on a

$$\operatorname{sgn}(u(t,0)-c)(F(u(t,0))-F(c)) \leq \operatorname{sgn}(u_b(t)-c)[\sum_{\lambda_k>0}\lambda_k M_k(u_b)+\sum_{\lambda_k<0}\lambda_k\omega_k(t)-F(c)].$$

En prenant $c>\sup(u(t,0),u_b(t))$ et $c<\inf(u(t,0),u_b(t))$ on a :

$$\sum_{\lambda_k<0}\lambda_k\omega_k(t)=F(u(t,0))-\sum_{\lambda_k>0}\lambda_k M_k(u_b(t)),$$

on remplace $\sum_{\lambda_k<0}\lambda_k\omega_k(t)$ par sa valeur dans (3.23) et on obtient le résultat désiré. $\diamondsuit$

3.5 Stabilité des schémas du 2^{nd} ordre

Dans cette partie, nous allons montrer que les résultats obtenus pour les schémas du premier ordre, peuvent être partiellement étendus pour ceux du second ordre. Dans un premier temps nous montrons leur stabilité, grâce à la formulation convexe due à Harten [24], pour ensuite préciser les limiteurs de pente qu'on impose sur la cellule du bord. La stabilité autorise une limitation relative des pentes qui améliorent la précision des calculs. Nous allons montrer que sur la cellule du bord les critères de stabilité changent par rapport à l'intérieur du domaine.

3.5.1 Schéma de convection d'ordre deux en espace

On approche la résolution du système diagonal par un schéma du second ordre. La solution est ici linéaire par morceaux. Dans un premier temps on cherche à calculer la valeur de la valeur moyenne par maille au temps suivant. Soit f_k la solution du problème de transport suivant

$$\begin{cases} \partial_t f_k+\lambda_k\partial_x f_k=0 \\ \\ f_k(0,x)=f_k^0(x)=\sum_i(f_i^n+\sigma_i^n\frac{(x-x_i)}{\Delta x})\mathbb{I}_{[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]}(x) \end{cases} \tag{3.24}$$

On applique la formule de Green-Gauss sur la loi de conservation que satisfait l'équation de transport :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}(\partial_t f_k+\lambda_k\partial_x f_k)(t,x)\,dt\,dx=0$$

ceci se transforme en

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f_k(t^{n+1},x)-f_k(t^n,x)\,dx+\frac{\lambda_k}{\Delta x}\int_{t^n}^{t^{n+1}} f_k(t,x_{i+\frac{1}{2}})-f_k(t,x_{i-\frac{1}{2}})\,dt=0.$$

Si on pose

$$f_{i,k}^{n+1}=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f_k(t^{n+1},x)dx,$$

on obtient

$$f_{i,k}^{n+1} = f_{i,k}^{n} - \frac{\lambda_k}{\Delta x}\int_{t^n}^{t^{n+1}} f_k(t, x_{i+\frac{1}{2}}) - f_k(t, x_{i-\frac{1}{2}})dt$$

f_k étant la solution du problème (3.24), on connait sa formulation explicite en tout point $(t,x) \in [t^n, t^{n+1}] \times \mathbb{R}^+$

$$f_k(t,x) = f_k^0(x - \lambda_k t)$$

ce qui nous donne des valeurs à integrer sur les interfaces $x_{i+\frac{1}{2}}$ et $x_{i-\frac{1}{2}}$ dans la précédente formule. A l'aide de ce dernier argument on obtient la formule suivante :

$$f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1-\xi_k)f_{i,k}^{n} + \xi_k f_{i-1,k}^{n} - \frac{\xi_k(1-\xi_k)}{2}(\sigma_{i,k}^{n} - \sigma_{i-1,k}^{n}),$$

si la vitesse de transport λ_k est positive, tandis que

$$f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1-\xi_k)f_{i,k}^{n} + \xi_k f_{i+1,k}^{n} + \frac{\xi_k(1-\xi_k)}{2}(\sigma_{i,k}^{n} - \sigma_{i+1,k}^{n}),$$

si $\lambda_k < 0$. Ce qui peut se réécrire dans la formulation de Harten [24] avec $D_{i\pm\frac{1}{2},k}^{n}$ défini par

$$\begin{cases} D_{i-\frac{1}{2},k}^{n} & = \xi_k(1 + \frac{(1-\xi_k)}{2}\frac{(\sigma_{i,k}^{n} - \sigma_{i-1,k}^{n})}{\Delta f_{i-\frac{1}{2},k}^{n}}) \quad \lambda_k > 0 \\ \\ D_{i+\frac{1}{2},k}^{n} & = \xi_k(1 - \frac{(1-\xi_k)}{2}\frac{(\sigma_{i,k}^{n} - \sigma_{i+1,}^{n})}{\Delta f_{i+\frac{1}{2},k}^{n}}) \quad \lambda_k < 0. \end{cases}$$

Les $\sigma_{i,k}^{n}$ sont définis comme des pentes limitées, c'est-à-dire

$$\sigma_{i,k}^{n} = \min\text{mod}\,(X_{1,k,i}\Delta f_{i+\frac{1}{2},k}^{n}, X_{2,k,i} f_{i-\frac{1}{2},k}^{n})$$

avec

$$\min\text{mod}\,(a,b) = \min(|a|,|b|) * \frac{\text{sgn}(a)+\text{sgn}(b)}{2}$$

$$\Delta f_{i+\frac{1}{2},k}^{n} = f_{i+1,k}^{n} - f_{i,k}^{n}.$$

et

$$(X_{1,k,i}, X_{2,k,i}) \in (\mathbb{R}^+)^2$$

Les deux coefficients représentent l'amplification possible de la prise en compte de chaque gradient. Il est possible de décentrer le schéma suivant le sens du transport (voir [22]), et de gagner ainsi en précision. A chaque pas de temps, on a défini une valeur moyenne $f_{i,k}^{n}$ par maille et par vitesse, et une pente $\sigma_{i,k}^{n}$.

3.5.2 Précision du choix des limiteurs sur la cellule du bord

Dans la partie stabilité de ce chapitre, nos avons établi tous les critères de stabilité qui nous permettent d'utiliser le théorème de Lax-Wendroff. Reste a voir à quelle condition on respecte l'hypothèse (H3) qui est la seule dépendante du schéma de transport.

Pour les caractéristiques rentrantes

Si on applique la formule de Green-Gauss sur la première maille, pour les composantes dont la vitesse est positive, on a l'équation suivante

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{-\frac{1}{2}}}^{x_{\frac{1}{2}}} (f_k(t^{n+1},x) - f_k(t^n,x))dx + \xi_k\frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} (f_k(t,x_{\frac{1}{2}}) - f_k(t,x_{-\frac{1}{2}}))dt = 0$$

mais tandis que sur l'interface $x_{\frac{1}{2}}$ on peut écrire la solution comme la translation de la condition initiale, ceci n'est plus le cas sur l'interface du bord. En fait le gain de précision se fera uniquement en améliorant la formule d'intégration sur l'interface $x_{-\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire en augmentant la précision de

$$u_b^n = \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} u_b(t)dt.$$

Si $f_{b,k}^n$ est la valeur moyenne sur l'interface $x_{-\frac{1}{2}}$, alors l'approximation par une fonction linéaire par morceaux en temps s'écrira

$$f_{b,k}(t) = \sum_{1\le n\le L}(f_{b,k}^n + \gamma_k^n \frac{t - t^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t})\mathbb{I}_{[t^n,t^{n+1}]}(t)$$

où $t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{t^n+t^{n+1}}{2}$, or

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} f_k(t,x_{-\frac{1}{2}})dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} f_{b,k}(t)dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left(f_b^n + \gamma_n\frac{(t-t^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta t}\right)dt = f_{b,k}^n$$

qui sera la contribution sur l'interface $x_{-\frac{1}{2}}$. On voit donc, que la contribution de la pente est nulle. En suivant ce raisonnement, on peut donc écrire que

$$\gamma_n = \sigma_{-1,k}^n = 0.$$

Il est à noter que cette contrainte ne rend pas le schéma du premier ordre sur la cellule du bord puisque le limiteur de pente σ_0^n lui est toujours actif.
En fait pour ce dernier, on a une valeur à l'interface $M_k(u_b^n)$, une valeur au centre de la maille $f_{0,k}^n$, donc on peut définir la pente σ_0^n par

$$\sigma_{0,k}^n = \sigma(X_{1,k}(f_{1,k}^n - f_{0,k}^n), 2X_{2,k}(f_{0,k}^n - M_k(u_b^n)))$$

où $\frac{2(f_{0,k}^n - M_k(u_b^n))}{\Delta x}$ est le gradient approché de la première demi-maille.
Pour les caractéristiques sortantes
Pour la pente associée à la cellule $i=0$, on dispose seulement de la valeur droite $f_{1,k}^n$, et la valeur à l'intérieur de la maille $f_{0,k}^n$. C'est à dire que l'on propose la pente suivante

$$\sigma_{0,k}^n = X_{1,k}(f_{1,k}^n - f_{0,k}^n)$$

On a donc complètement défini le schéma, ce qui nous permet d'expliciter la forme convexe qui y est associée dans la première partie de ce chapitre.

Proposition 3.5.1 *Si pour* $\lambda_k > 0$

$$0 \le X_{1,k,i} \le \frac{2}{1-\xi_k}$$

$$0 \le X_{2,k,i} \le \frac{2}{\xi_k}$$

pour tout $i \ge 1$ *tandis que*

$$X_{2,k,0} \le \frac{1}{\xi_k}$$

et pour $\lambda_k < 0$, *et* $i \ge 0$

$$X_{1,k,i} \le \frac{2}{\xi_k}$$

$$X_{2,k,i} \le \frac{2}{1-\xi_k}$$

alors pour tout $i \ge 0$, *et tout* $k \in \{1,..,N\}$

$$D_{i+\frac{1}{2},k}^n \in [0,1]$$

Preuve : Par des arguments classiques pour tout $i \ge 1$, (voir [22]), le résultat est vrai. On doit juste regarder de plus près les propriétés du schéma sur la cellule du bord $(i=0)$.

1) $\lambda_k < 0$

Dans ce cas, les coefficients selon Harten s'écrivent :

$$D^n_{\frac{1}{2},k} = \xi_k(1 - \frac{(1-\xi_k)}{2}(\sigma(\frac{X_{1,k,1}}{r^n_1}, X_{2,k,1}) - X_{1,k,0}))$$

Si $X_{1,k,0} \leq \frac{2}{\xi_k}$ alors $D^n_{\frac{1}{2},k} \leq 1$, tandis que $X_{2,k,1} \leq \frac{2}{(1-\xi_k)}$ implique $D^n_{\frac{1}{2},k}$ supérieur ou égal à 0.

2) $\lambda_k > 0$

Comme $\sigma^n_{-1} = 0$ et $\sigma^n_0 = \sigma(X_{1,k,0}(f^n_{1,k} - f^n_{0,k}), 2X_{2,k,0}(f^n_{0,k} - M_k(u_b)))$ alors la forme incrémentale s'écrit :

$$D^n_{-\frac{1}{2},k} = \xi_k(1 + \frac{(1-\xi_k)}{2}(\sigma(\frac{X_{1,k,0}(f^n_{1,k} - f^n_{0,k})}{f^n_0 - M_k(u^n_b)}, 2X_{2,k,0})))$$

et évidemment $D^n_{-\frac{1}{2},k}$ est positif, alors que $D^n_{-\frac{1}{2},k} \leq 1$ si $X_{2,k,0} \leq \frac{1}{\xi_k}$

$\diamondsuit$

Donc, la solution u_Δ donnée par le schéma tend vers une solution faible du problème (3.1). Comme pour les schémas du premier ordre, on a donc le théorème suivant

Théorème 3.5.1 *Si les maxwelliennes sont* **MND** *, si la condition CFL est respectée, c'est-à-dire*

$$\forall k \ \ \xi_k \in [0,1]$$

et si les limiteurs vérifient les hypothèses de la proposition 3.5.1 alors

$$u_\Delta \to u \ \textit{dans} \ L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}^+))$$

où u est une solution faible du problème (3.1). De plus on sait que

$$u \in C^0([0,T]; L^1(\mathbb{R}^+))$$

grâce à la propriété d'équicontinuité en temps.

Chapitre 4

Tests numériques pour le problème avec bord

4.1 Introduction

Dans cette partie, nous étudions les applications numériques des schémas pour lesquels mous avons établi les critères de stabilité et de convergence dans le chapitre précédent.

La première partie concerne les lois de conservation scalaires en une dimension d'espace, nous présentons les détails précis liés aux schémas avec un modèle de relaxation à deux vitesses. Comme nous discrétisons un système semi-linéaire, on peut imposer plusieurs conditions aux limites qui donnent toutes des limites comparables. Nous montrons les autres conditions aux limites possibles et les schémas associés. Nous présentons le modèle à trois vitesses qui dissipe beaucoup moins sur le bord comme à l'intérieur du maillage. Nous comparons ensuite tous ces schémas sur des données oscillantes pour une équation scalaire dont le flux est quadratique ou cubique.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous montrons comment étendre les modèles présentés dans le cas scalaire au cas des systèmes de lois de conservation en une ou plusieurs dimensions d'espace. Nous nous intéressons au cas particulier de la dynamique des gaz compressibles. Dans cette partie, on distingue deux types de conditions aux limites.

1 Les conditions constantes de type Dirichlet non homogène. Dans ce cas on ne sait pas caractériser les solutions exactes lorsque l'on est en présence de champs linéairement dégénérés. Nous présentons deux cas test qui montrent de façon claire que nos modèles ne fournissent pas des solutions de type demi solution du problème de Riemann.

2 Les problèmes de type réflexion sur paroi solide. Dans la littérature les exemples de cas tests numériques sont nombreux, nous en présentons quelques uns.

4.2 Problème 1D scalaire

Au cours des chapitres précédents, nous avons défini les différentes approximations de la loi de conservation scalaire

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \text{ sur } \mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_t^+ \\ u(0,x) = u^0(x) \text{ sur } \mathbb{R}_x^+ \times \{0\} \\ u(t,0) = u_b(t) \text{ sur } \{0\} \times \mathbb{R}_t^+ . \end{cases} \tag{4.1}$$

Nous avons d'abord introduit le système cinétique

$$\begin{cases} \partial_t f_k + \lambda_k \partial_x f_k = \frac{1}{\epsilon}(M_k(u^\epsilon) - f_k) \quad k \in \{1, \ldots, N\}, \\ f_k(0,x) = M_k(u^0(x)), \quad t = 0, \\ f_k(t,0) = M_k(u_b(t)), \quad \forall \lambda_k > 0 \quad \text{et } x = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Le chapitre trois nous a donné, ensuite, une écriture microscopique des schémas pour un maillage structuré. On rappelle que les indices i et n nous permettent de discrétiser $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+$

. en espace

$$\mathbb{R}^+ = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$$

avec $x_{i-\frac{1}{2}} = i\Delta x$

. en temps

$$(0,T) = \bigcup_{0\leq n\leq L-1} [t^n, t^{n+1}]$$

et $t^n = n\Delta t$

On appelle cellule n, i le pavé

$$[t^n, t^{n+1}[\times[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$$

On écrit les schémas cinétiques en deux étapes pour toute cellule n, i du maillage :

1 Transport

$$\begin{cases} \lambda_k > 0 \quad f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1-\xi_k) f_{i,k}^n + \xi_k f_{i-1,k}^n - \frac{\xi_k(1-\xi_k)}{2}(\sigma_{i,k}^n - \sigma_{i-1,k}^n) \\ \lambda_k = 0 \quad f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = f_{i,k}^n \\ \lambda_k < 0 \quad f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = (1-\xi_k) f_{i,k}^n + \xi_k f_{i+1,k}^n + \frac{\xi_k(1-\xi_k)}{2}(\sigma_{i,k}^n - \sigma_{i+1,k}^n) \end{cases} \quad \forall i \geq 0$$

avec

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \sum_k f_{i,k}^n,$$

et

$$\lambda_k > 0 \implies f_{-1,k}^n = M_k(u_b^n).$$

Si pour tout n, tout k et tout i $\sigma_{i,k}^n = 0$, alors le schéma est du premier ordre en espace, sinon les limiteurs $\sigma_{i,k}^n$ sont définis comme dans le chapitre 3 section 3.5

2 Projection

$$f_{i,k}^{n+1} = (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\epsilon}}) M_k(u_i^{n+\frac{1}{2}}) + e^{-\frac{\Delta t}{\epsilon}} f_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} \quad \forall i \geq 0, n \geq 1$$

Notons que le schéma discrétise (4.2) à $\epsilon \geq 0$ fixé.

Nous donnons d'abord un exemple de modèle que nous discrétisons ensuite pour obtenir une forme complètement explicite des schémas numériques. Si on prend, par exemple,

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + \lambda^2 \partial_x u = \frac{1}{\epsilon}(F(u) - v) \end{cases} \tag{4.3}$$

qu'on diagonalise sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t f_+ + \lambda \partial_x f_+ = \frac{1}{\epsilon}(M_+(u) - f_+) \\ \partial_t f_- - \lambda \partial_x f_- = \frac{1}{\epsilon}(M_-(u) - f_-) \end{cases}$$

les maxwelliennes associées s'écrivent :

$$M_{\pm} = \frac{1}{2}[u \pm \frac{F(u)}{\lambda}]$$

Pour respecter la condition de monotonie sur $I \subset \mathbb{R}$, on voit qu'on doit avoir

$$M'_{\pm} = \frac{1}{2}[1 \pm \frac{F'(u)}{\lambda}] \geq 0 \ \ \forall u \in I$$

ce qui donne une condition sur le vecteur vitesse λ qui s'écrit

$$\lambda > \max_{u \in I} |F'(u)|$$

qui est la version scalaire de la condition sous-caractéristique. Ce qui précède nous donne un schéma complètement explicite qui s'écrit, a l'ordre un en espace et sur la cellule du bord :

- Transport

$$\begin{aligned} f_{0,+}^{n+\frac{1}{2}} &= (1-\xi) f_{0,+}^{n} + \xi f_{b,+}^{n} \\ f_{0,-}^{n+\frac{1}{2}} &= (1-\xi) f_{0,-}^{n} + \xi f_{1,+}^{n} \end{aligned} \tag{4.4}$$

- Collision

$$f_{0,\pm}^{n+1} = (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\epsilon}}) M_{\pm}(u_0^{n+\frac{1}{2}}) + e^{-\frac{\Delta t}{\epsilon}} f_{0,\pm}^{n+\frac{1}{2}} \ \ \forall n \geq 1. \tag{4.5}$$

4.2.1 Confrontation entre deux conditions aux limites

En fait pour le système relaxé (4.3), on a un degré de liberté dans l'expression de la condition aux limites. Une formulation générale de celle-ci, imposée sur la caractéristique rentrante f_+ s'écrit, pour le modèle continu (4.3) :

$$f_+(t,0) = M_+(u_b(t)) - \alpha(f_-(t,0) - M_-(u_b(t))) \tag{4.6}$$

avec α réel dans $]-1:1]$. La condition utilisée dans [39] s'obtient pour $\alpha = 0$ dans la formule précédente, tandis que la condition de type Dirichlet, utilisée dans [48], vaut pour $\alpha = 1$. Pour cette dernière valeur de α, on ne peut pas garantir la convergence vers la solution entropique au sens de [5] quand ϵ tend vers 0. La condition (4.6) se réécrit de façon discrète, pour les schémas (4.4),(4.5) :

$$f_{b,+}^n = M_+(u_b^n) - \alpha(f_{0,-}^n - M_-(u_b^n))$$

On voit que suivant la valeur de α, on obtient des schémas différents sur la première cellule du maillage. La condition aux limites intervient dans la partie transport, et les différences entre les schémas demeurent même pour $\epsilon = 0$. Par exemple, discrétisé à l'ordre un, le modèle à deux vitesses est connu pour donner le schéma de Lax-Friedrichs. Sur la cellule du bord, il en est de même pour la condition $\alpha = 0$, il suffit, pour s'en rendre compte d'écrire :

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} = \;& u_0^n - \xi[(M_+(u_0^n) - M_-(u_1^n)) - (f_{b,+}^n - M_-(u_0^n))] \\ = \;& u_0^n - \xi[(M_+(u_0^n) - M_-(u_1^n)) - (M_+(u_b^n) - M_-(u_0^n))] \\ & -\xi\alpha(M_-(u_0^n) - M_-(u_b^n)) \\ = \;& u_0^n - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}[h_{LF}(u_1^n, u_0^n) - h_{LF}(u_0^n, u_b^n)] \\ & -\alpha\left[\tfrac{\Delta t \lambda}{\Delta x}(u_0^n - u_b^n) - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}(F(u_0^n) - F(u_b^n))\right] \end{aligned}$$

On voit qu'un terme supplémentaire apparaît. Il semble que la condition $\alpha = 0$ soit optimale. Et dans les tests suivants nous allons le montrer.

Equation de Burgers et solution exacte

Avant de présenter les résultats numériques, nous donnons la solution générale du problème discrétisé

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(\frac{u^2}{2}) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_t^+ \\ u(0,x) = u^0 \text{ sur } \mathbb{R}_x^+ \times \{0\} \\ u(t,0) = u_b \text{ sur } \{0\} \times \mathbb{R}_t^+ . \end{cases}$$

Les données (u_b, u^0) sont des constantes. Deux cas de figures se présentent, soit on attend un choc, soit une détente. Dans les deux cas les solutions peuvent sortir du domaine et laisser la condition initiale comme solution stationnaire.

1 *Détente:* $u_b \leq u^0$
La solution est auto-similaire, et si $u_b \geq 0$ alors,

$$w(t,x) = \begin{cases} u_b & \text{si } 0 \leq x \leq u_b t \\ x & \text{si } x \leq u^0 t \\ u^0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La trace respecte la condition aux limites. Si maintenant $u_b \leq 0$ on a seulement :

$$w(t,x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq u^0 t \\ u^0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est évident que si $u^0 \leq 0$ alors $w(t,x) = u^0$ pour tout temps et tout x.

2 *Choc:* $u_b \geq u^0$
On sait que la vitesse de propagation du choc s'écrit, à l'aide des relations de Rankine-Hugoniot

$$\sigma(u_b, u^0) = \frac{F(u_b) - F(u^0)}{u_b - u^0} = \frac{1}{2}(u_b + u^0).$$

On a donc deux possibilités

$$\begin{cases} \sigma(u_b, u^0) > 0 \implies & w(t,x) = \begin{cases} u_b & \text{si } x \leq \sigma t \\ u^0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \sigma(u_b, u^0) \leq 0 \implies & w(t,x) = u^0 \end{cases}$$

Données non transsoniques

Nous posons comme données :

$$\begin{cases} u_b(t) = -1 & \forall t > 0 \\ u^0(x) = 1 & \forall x > 0 \end{cases}$$

Nous regardons les solutions approchées de (4.3), pour $\epsilon = \{2, 0.5, 0.125, 0.0625, 0.00125\}$, pour le schéma associé à $\alpha = 0$ et celui pour le quel $\alpha = 1$.

Dans la figure 4.1, nous avons montré le comportement de la solution u et de la caractéristique rentrante f_+, pour $\alpha = 0$. Suit la figure 4.2, où pour $\alpha = 1$, on montre comment u restant fixé au bord, et c'est f_+ qui varie.

On remarque aussi que lorsque ϵ est grand, la borne $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ définie pour le schéma à l'équilibre ($\alpha = 0$) ne vaut pas pour le schéma avec $\alpha = 1$ (voir figures 4.1 à 4.3). Au chapitre précédent, on a montré que les quantités microscopiques sont encadrées par $M_\pm(\pm\mu_\infty)$ où $\mu_\infty = \max(||u_b||_{L^\infty(0,T)}, ||u^0||_{L^\infty(\mathbb{R}^+)})$, et ce indépendamment de ϵ. Ici $\mu_\infty = 1$, on voit que f_+^{NT} ($\alpha = 0$) est toujours dans $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Ce n'est pas le cas pour f_+^{XW} ($\alpha = 1$).

Les résultats sont représentés au temps $t = 0.3$. Le pas d'espace utilisé est $\Delta x = 0.001$, tandis que la cfl est égale à 0.7.

Sur tous les graphiques, NT représente le schéma associé à la condition à l'équilibre $\alpha = 0$, tandis que XW désigne le schéma avec Dirichlet obtenu pour $\alpha = 1$.

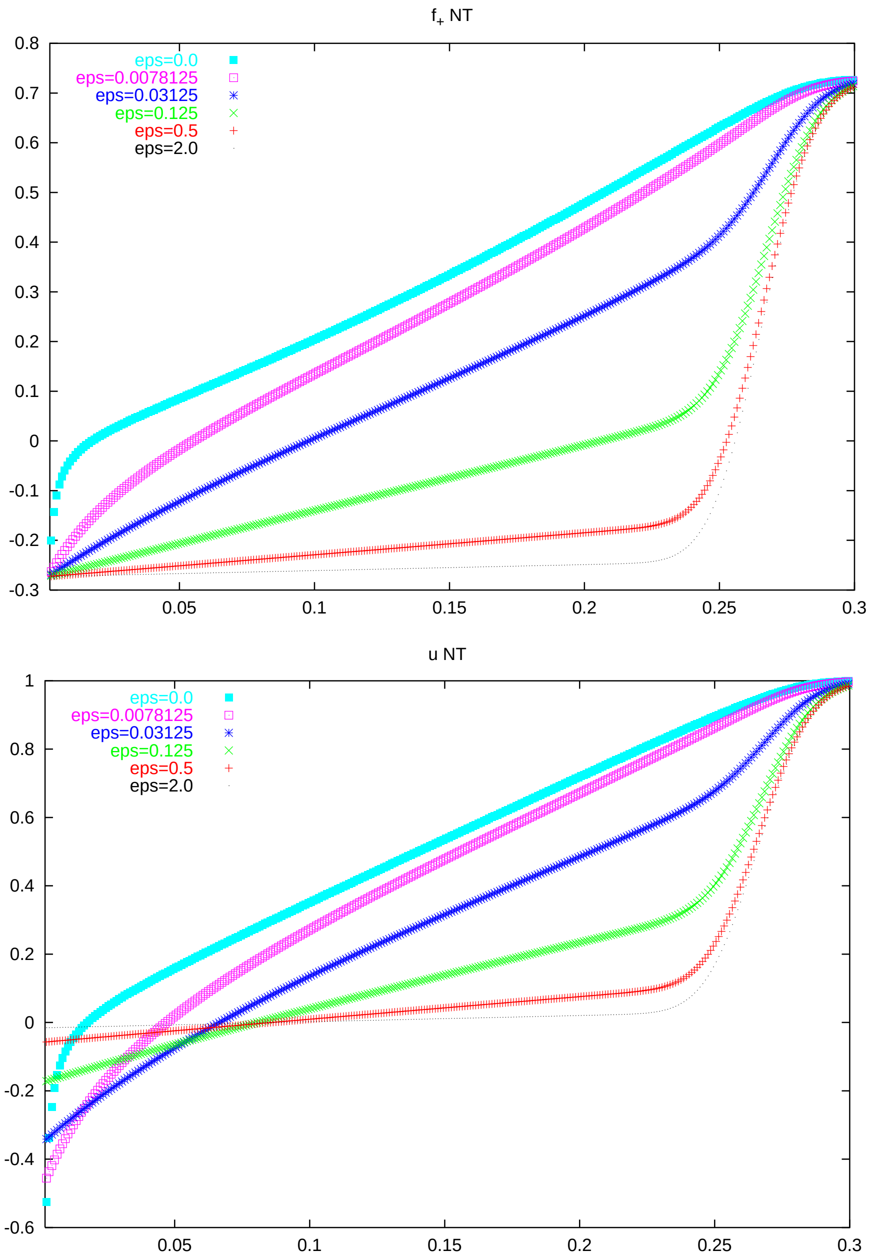
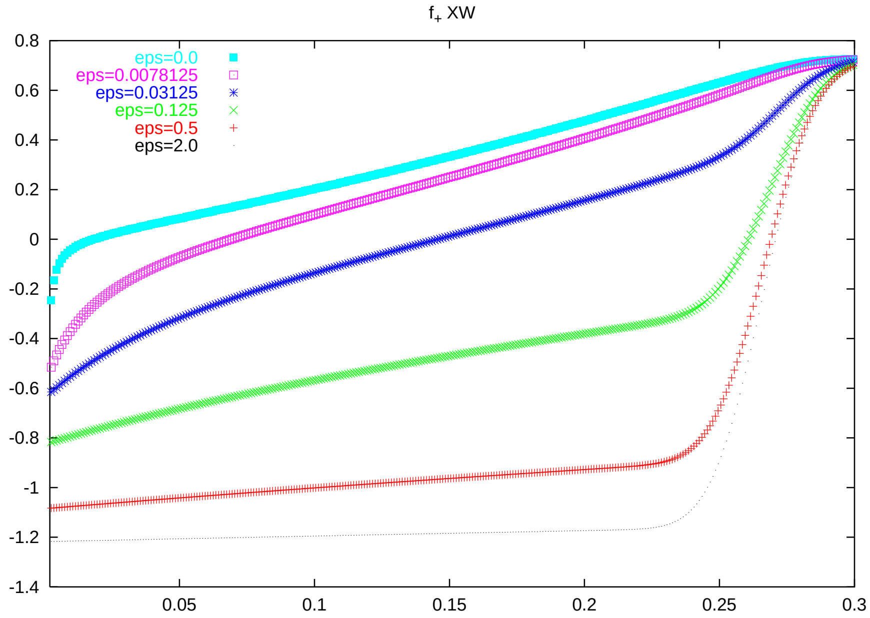


FIG. 4.1 – f_+ et u pour $f_+ = M_+(u_b)$ (équilibre NT)



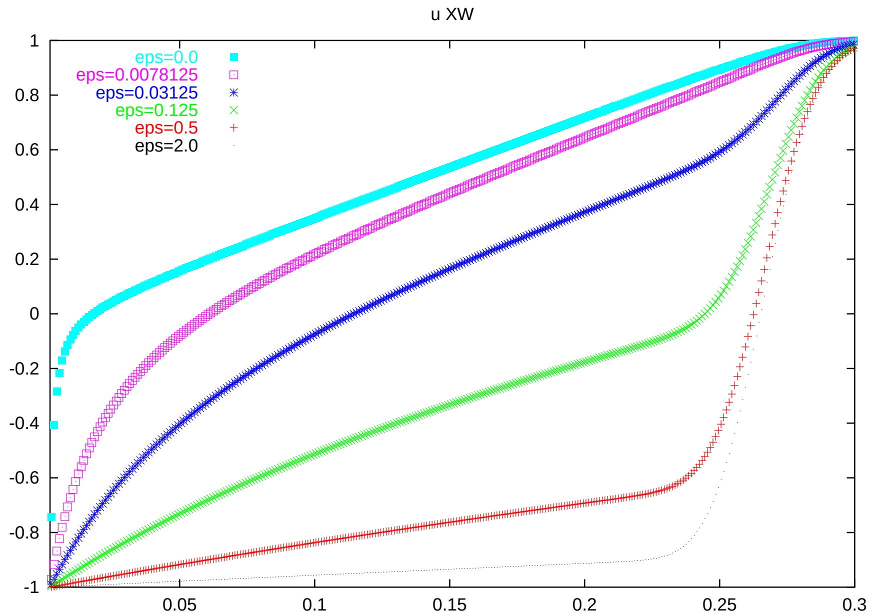


FIG. 4.2 – f_+ et u pour $u(t,0) = u_b$ (Dirichlet XW)

La différence entre les deux schémas reste visible même lorsque $\epsilon = 0$. Dans les figures 4.3 on constate cette différence, ce qui confirme la remarque faite par rapport au schéma de Lax-Friedrichs.

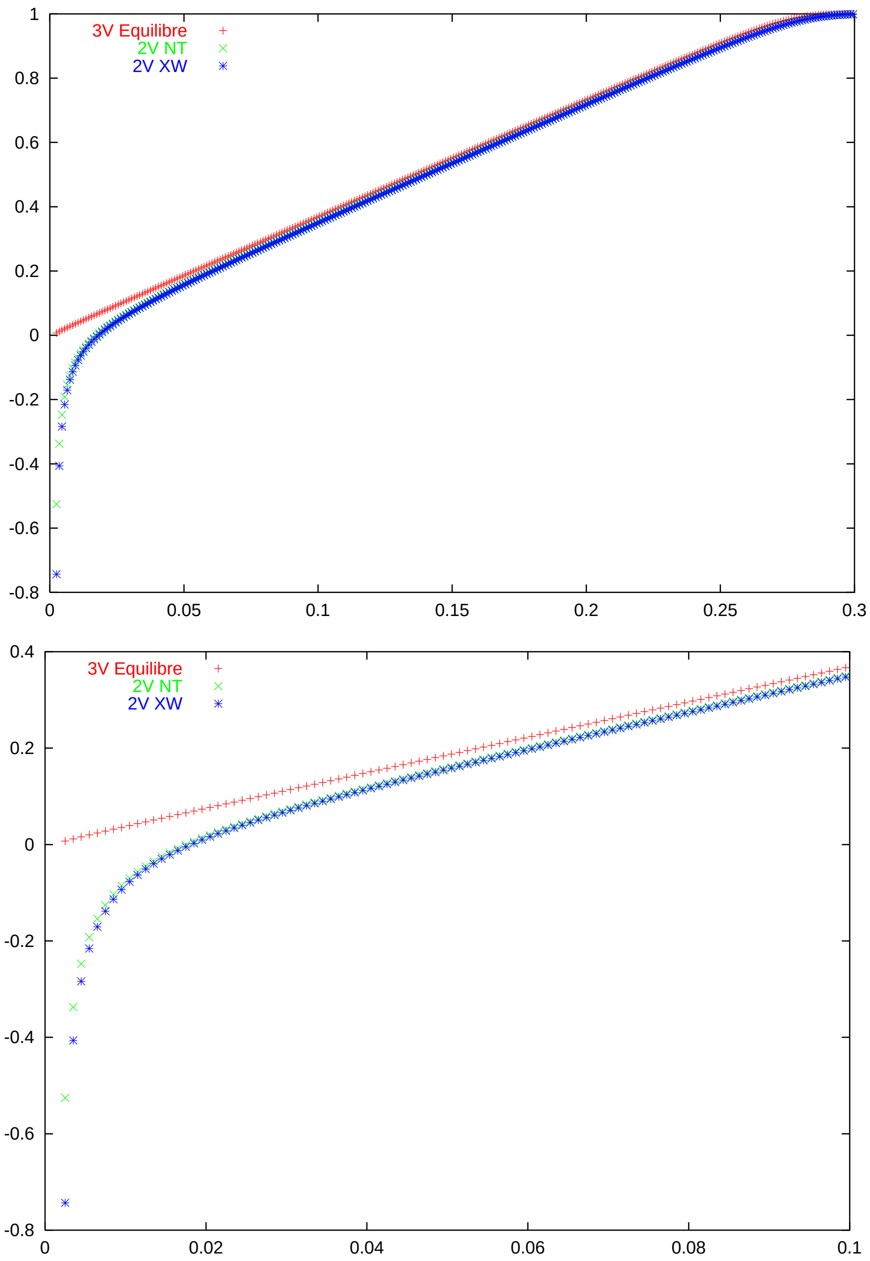


FIG. 4.3 – Confrontation schémas (Dirichlet XW) et (équilibre NT)

Données transsoniques

On impose :

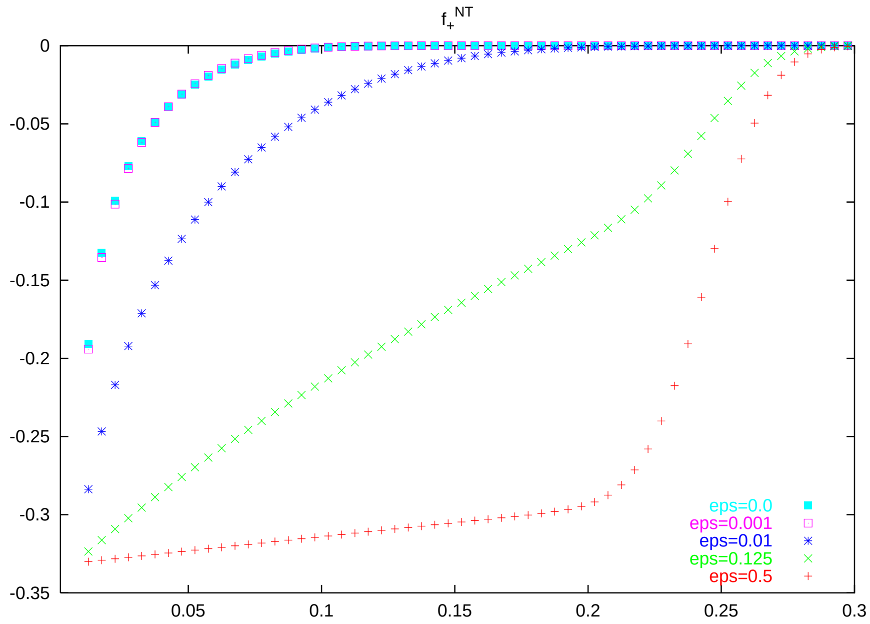
$$\begin{cases} u_b(t) = -1 & \forall t > 0 \\ u^0(x) = 0 & \forall x > 0 \end{cases}$$

La solution exacte dans ce test est nulle partout puisque la détente provoquée par le jeu des données ($u_b \leq u^0$) et du flux ($F(u) = \frac{u^2}{2}$) sort du domaine.

Les données de ce test contredisent les hypothèses utilisées dans [48]. En effet, la condition initiale est un état transsonique car

$$F(u) = \frac{u^2}{2} \implies F'(u^0(x)) = F'(0) = 0$$

Grâce à ces hypothèses, les auteurs s'assurent de l'unicité de la limite du modèle. Malgré tout, on voit que le schéma qui y est associé ($\alpha = 1$) converge vers la même solution entropique que le notre ($\alpha = 0$). (voir figures 4.4 à 4.5).



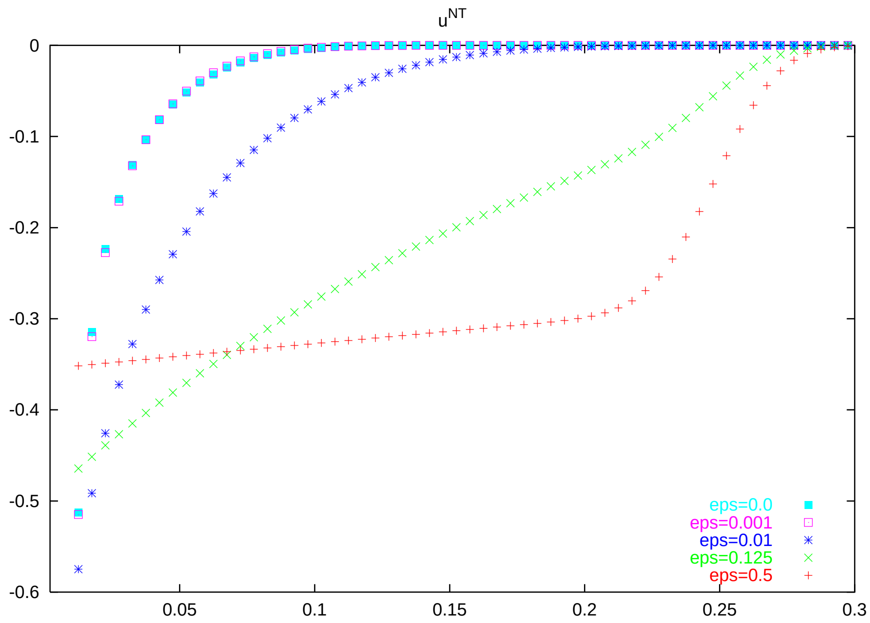


FIG. 4.4 – f_+ et u pour différentes valeurs d'ϵ cb à l'équilibre

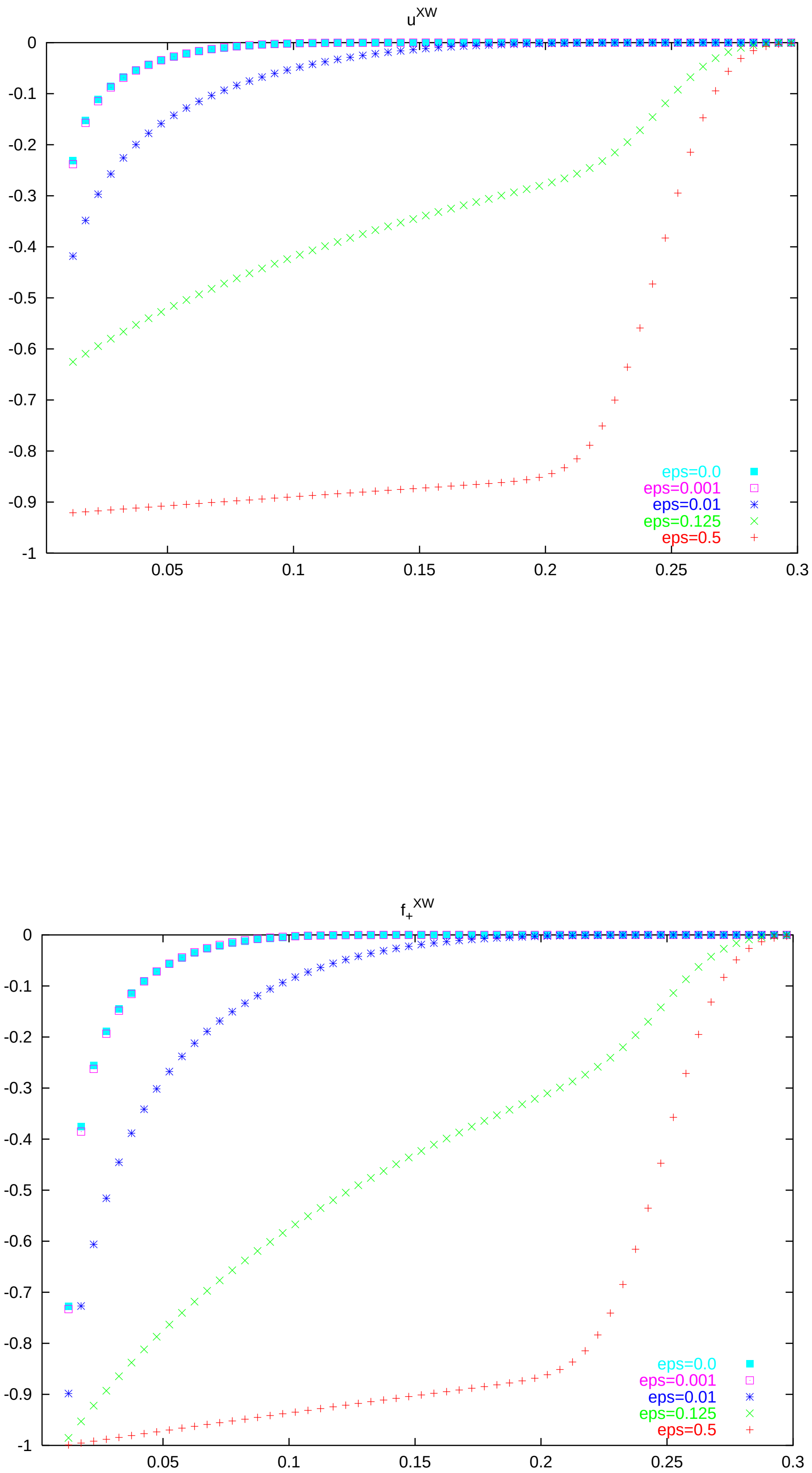
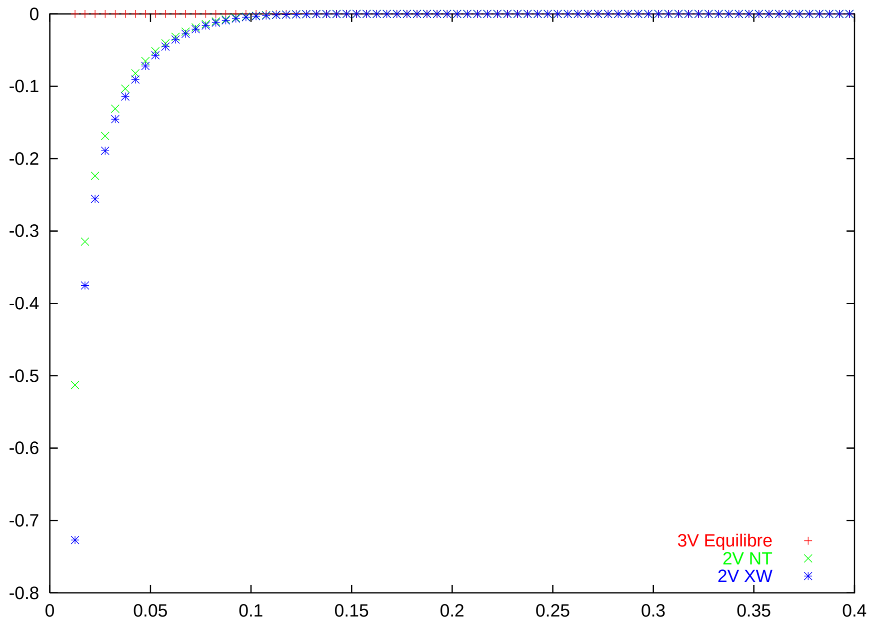


FIG. 4.5 – solutions f_+ et u pour différentes valeurs d'ϵ cb Dirichlet

Pour $\epsilon = 0.0$, on voit que les conditions aux limites produisent une diffusion numérique étalée sur une vingtaine de mailles près du bord, (voir figure 4.6).



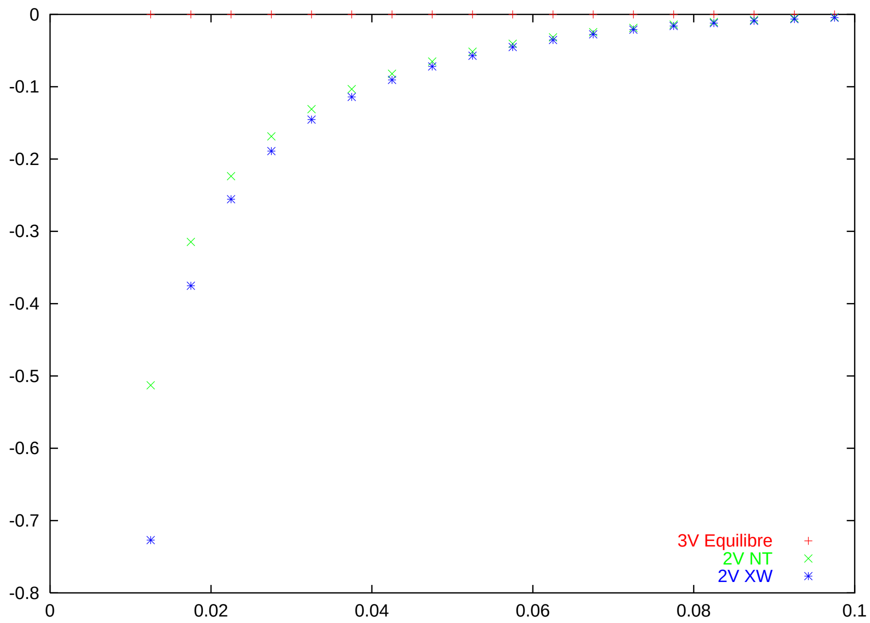


FIG. 4.6 – solution u pour $\epsilon = 0.0$ confrontation cb Xin & Wang avec la cb à l'équilibre

4.2.2 Comparaison des résultats précédents avec un modèle à trois vitesses

Pour montrer l'intérêt de l'extension des résultats de [39] au cas de systèmes à plus de deux vitesses, nous discrétisons maintenant le modèle suivant

$$\left\{\begin{array}{ll}\partial_t f_+^\epsilon + \lambda \partial_x f_+^\epsilon & = \frac{1}{\epsilon}(M_+(u) - f_+^\epsilon) \\ \partial_t f_0^\epsilon & = \frac{1}{\epsilon}(M_0(u) - f_0^\epsilon) \\ \partial_t f_-^\epsilon - \lambda \partial_x f_-^\epsilon & = \frac{1}{\epsilon}(M_-(u) - f_-^\epsilon)\end{array}\right.$$

avec

$$\begin{cases} M_+(u) = (\int_0^u [F'(s)]_+ \, ds)/\lambda \\ M_-(u) = -(\int_0^u [F'(s)]_- \, ds)/\lambda \\ M_0(u) = u - (\int_0^u |F'(s)| ds)/\lambda \end{cases}$$

où $[\cdot]_\pm$ désigne la partie positive (resp. négative). La condition aux limites est imposée seulement sur f_+^ϵ par

$$f_+^\epsilon(t,0) = M_+(u_b(t))$$

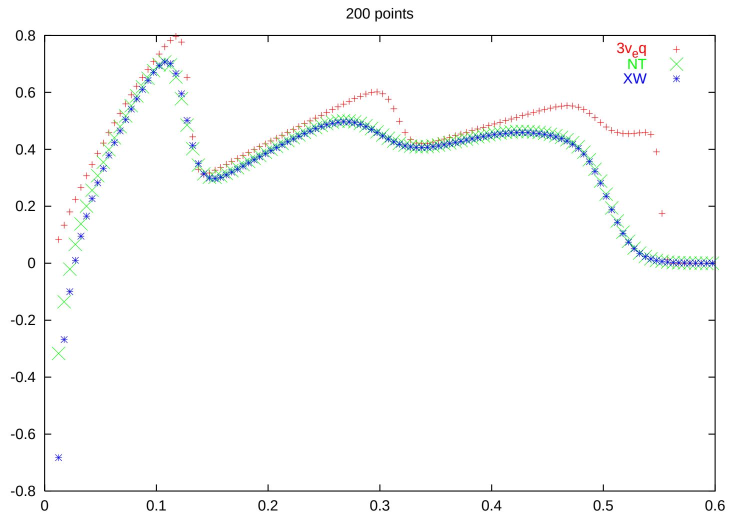
A l'ordre un en espace, ce schéma est l'expression cinétique du schéma d'Enquist-Osher. Nous montrons le gain en précision sur les figures 4.3 pour la demi-détente rentrante et 4.6 pour la détente sortante.

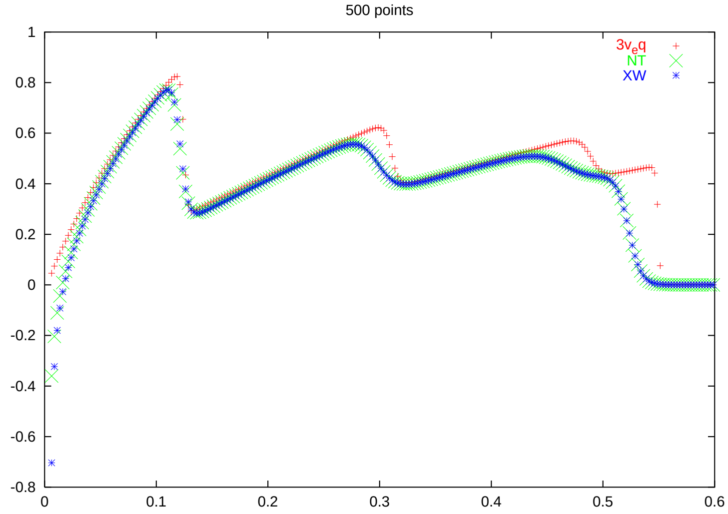
4.2.3 Quelques résultats spécifiques au problème avec bord

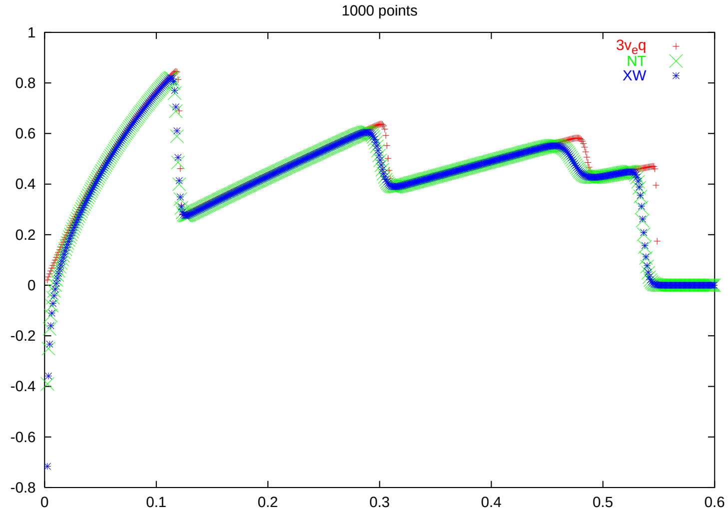
Dans ce paragraphe, nous montrons un cas test qui n'est pas une demi-solution du problème de Cauchy, mais un vrai problème avec bord. Nous imposons les données suivantes :

$$\begin{cases} u_b(t) = sin(18 * t) & t \geq 0 \\ u^0(x) = 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

On voit que la condition aux limites varie en temps. L'équation approchée reste celle de Burgers ($F(u) = \frac{u^2}{2}$). La solution comporte une succession de choc et de détentes. Nous confrontons tous les schémas du premier ordre présentés ci-dessus.



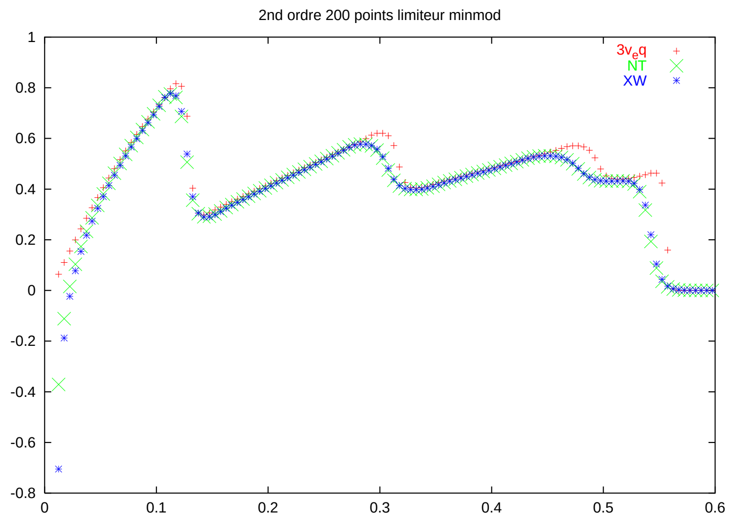




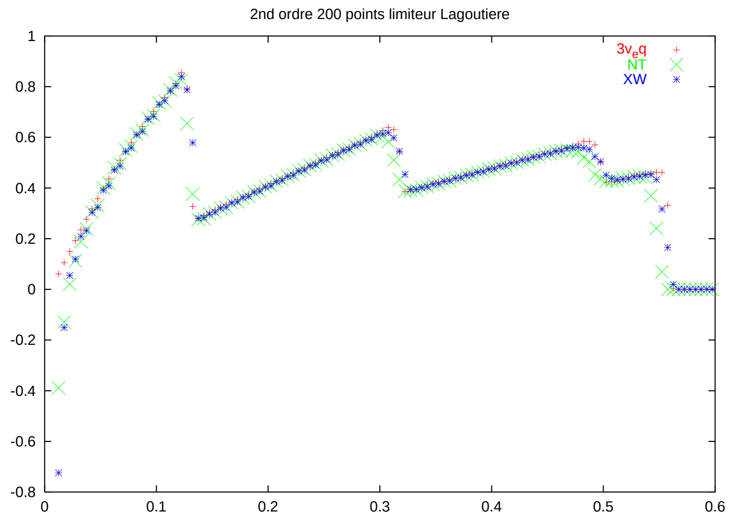
Sans limiteurs de pente, les schémas à deux vitesses diffusent et régularisent la solution. Nous montrons dans la suite les solutions fournies par les schémas du second ordre en espace. D'abord on utilise le limiteur $\min \bmod$ standard pour une cfl égale à 0.2

$$\sigma(a, b) = \frac{\mathrm{sgn}(a) + \mathrm{sgn}(b)}{2} \min(|a|, |b|)$$

de façon uniforme sur tout le maillage. Comme l'influence des limiteurs de pente diminue quand le pas de discrétisation tend vers 0, nous montrons seulement les résultats sur une grille grossière. Pour le limiteur $\min \bmod$ on a



Pour le limiteur décentré suivant les directions de transport (amont pour les vitesses positives, aval pour celles négatives), on obtient de bien meilleurs résultats.(voir [20])

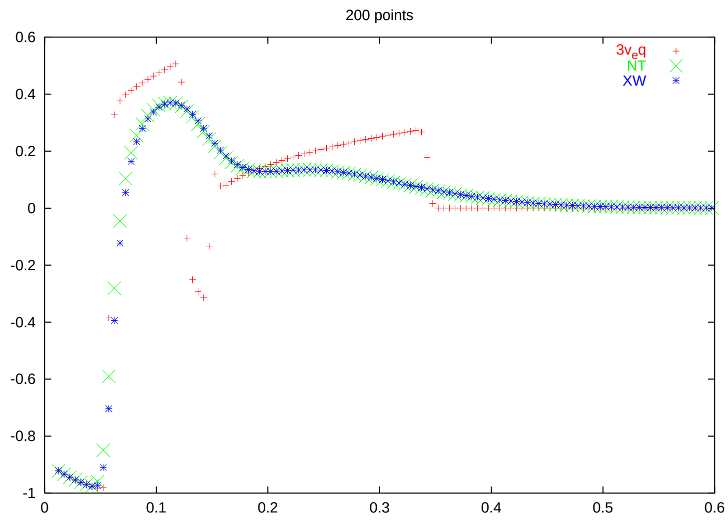


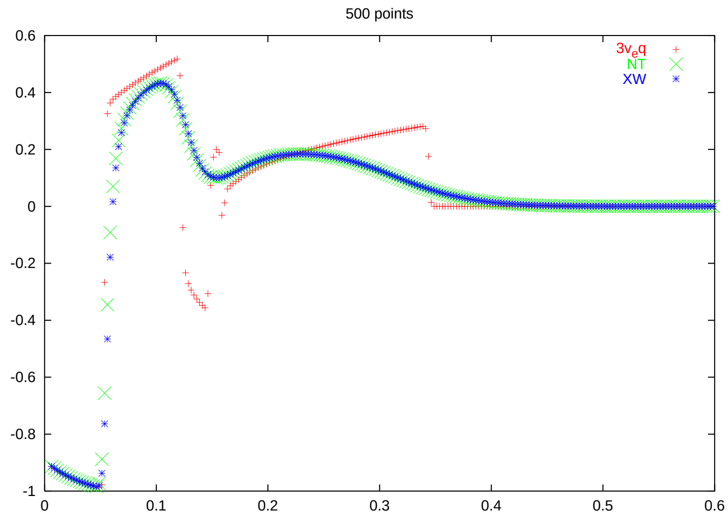
4.2.4 Flux non convexe

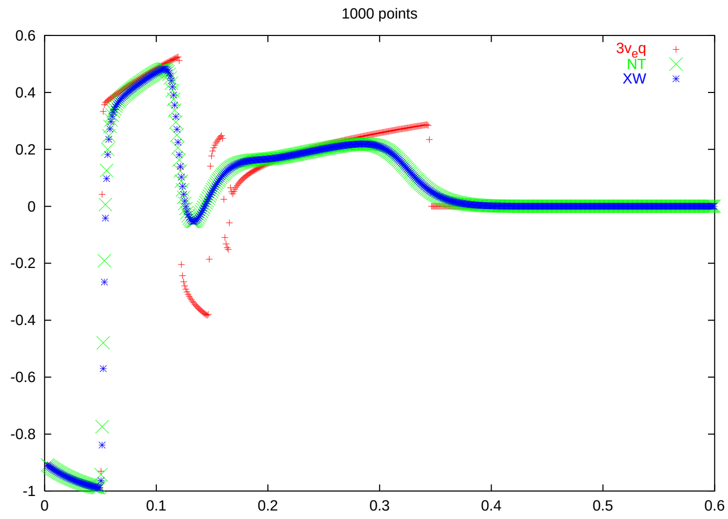
Pour montrer que les schémas résolvent indifféremment tous les flux dérivables, on étudie le cas non convexe avec un flux cubique ($F(u) = \frac{u^3}{3}$), avec les données

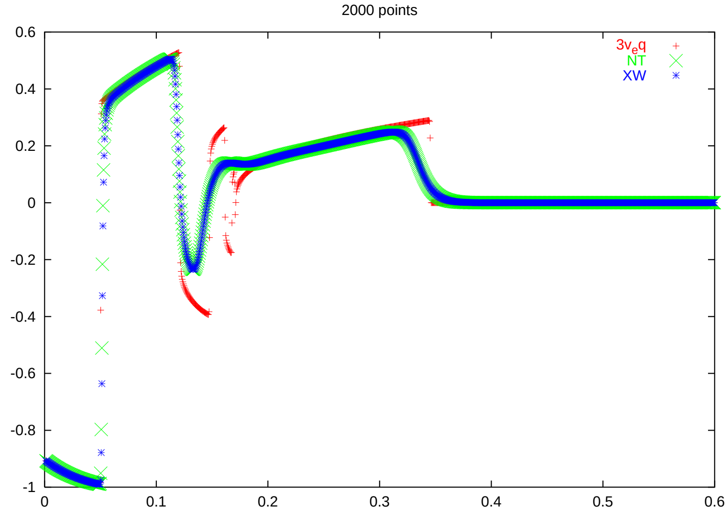
$$\begin{cases} u_b(t) = sin(6 * t) & t \geq 0 \\ u^0(x) = 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

On prend une condition aux limites qui oscille plus lentement en temps, car le flux donne des ondes plus compliquées. Au premier ordre, on obtient des résultats de convergence assez lents pour les schémas à deux vitesses.

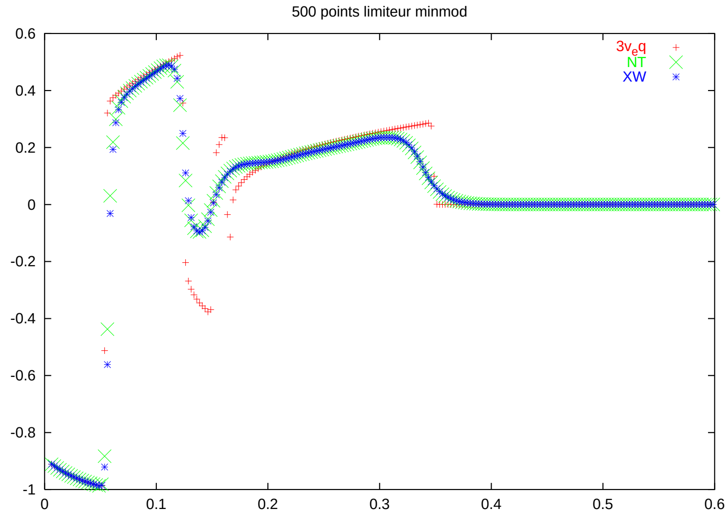

200 points
3v_eq
NT
XW
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

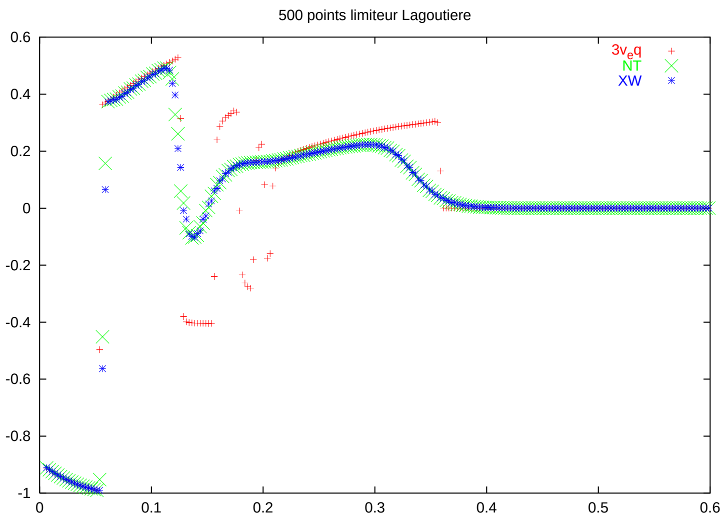

500 points
3v_eq
NT
XW
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6


1000 points
3v_eq
NT
XW
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6



On remarque une structure très irrégulière sur $[0.1, 0.2]$, elle est due à un effet de compression des ondes de petite amplitude par des ondes plus rapides venant du bord. On remarque que la structure est de plus en plus complexe quand Δx tend vers 0. Comme dans le paragraphe précédent nous appliquons les schémas du second ordre. Passer à l'ordre deux en espace pour les schémas relaxés "XW" et "NT" n'améliore pas beaucoup les résultats.





Pour la partie scalaire, on peut conclure que le schéma à trois vitesses donne résolument de meilleurs résultats pour tous les tests.

4.3 Etude de quelques systèmes

Dans cette partie, nous présentons une classe de schémas qui s'applique aux lois de conservation vectorielles en une ou plusieurs dimensions d'espace. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^D$ contenant un bord $\partial\Omega$, on considère une solution faible $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^p$, du problème

$$\partial_t u + \sum_{d=1}^{D} \partial_{x_d} F_d(u) = 0 \tag{4.7}$$

avec comme condition initiale

$$u(0,x) = u^0(x) \tag{4.8}$$

et on veut imposer une condition aux limites

$$u(t,x) = u_b(t,x) \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{4.9}$$

Dans le cas scalaire comme dans le cas vectoriel, ce n'est pas toujours possible. On suppose que le système (4.7) est hyperbolique et symétrisable, c'est-à-dire que les matrices jacobiennes (F_d') des flux ont des valeurs propres réelles et admettent pour un état u fixé un symétriseur commun. Les flux sont supposés réguliers: $F_d \in C^1(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^p)$. On approche le problème (4.7),(4.8) et (4.9) par une suite de systèmes semi-linéaires

$$\partial_t f_k^\epsilon + \overrightarrow{\lambda_k} \cdot \overrightarrow{\nabla} f_k^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(M_k(u^\epsilon) - f_k^\epsilon) \tag{4.10}$$

Le vecteur f_k^ϵ se compose de p composantes, et $u^\epsilon = \sum_k f^\epsilon$. Pour chaque composante f_k on a un vecteur λ_k de dimension D. A ce système d'équations on associe les données

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k^\epsilon(0,x) = M_k(u^0(x)) \quad \forall x \in \Omega \;\; \forall k \in \{1,\ldots,N\} \\ \\ f_k^\epsilon(t,x) = M_k(u_b(t,x)) \quad \forall x \in \partial\Omega \text{ et } \forall k \text{ t.q. } \overrightarrow{\lambda_k} \cdot \overrightarrow{\nu} < 0, \end{array} \right. \tag{4.11}$$

le vecteur $\overrightarrow{\nu}$ est la normale sortante du bord $\partial\Omega$. La dernière condition aux limites est une généralisation de la condition vue aux chapitres précédents pour le cas d'un bord quelconque, pour n'importe quelle dimension d'espace. Les maxwelliennes sont maintenant des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. De plus, on suppose qu'elles satisfont les relations suivantes pour tout $u \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est un certain rectangle de $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{cases} \sum_k M_k(u) = u, \\ \sum_k \lambda_{k,d} M_k(u) = F_d(u). \quad \forall d = 1, \dots, D \end{cases} \tag{4.12}$$

où $\lambda_{k,d}$ est le $d^{\text{ième}}$ élément du vecteur $\overrightarrow{\lambda_k}$. Pour la stabilité, on ne peut plus parler de monotonie des maxwelliennes puisque M_k' est maintenant un matrice de taille $p \times p$. Par contre François Bouchut a montré que si il existe η une entropie convexe associée au problème (4.7)-(4.9) alors si et seulement si les maxwelliennes satisfont

$$(\eta'' M_k'(u)\xi, \xi) > 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^p \quad \forall k = \{1, \dots, N\}$$

il existe une suite $(H_k)_{k=\{1,\dots,N\}}$ d'entropies microscopiques associées au système (4.10), convexes et telles que

$$\forall f \text{ t.q. } \sum_k f_k = u \quad \eta(u) = \sum_k H_k(M_k(u)) \leq \sum_k H_k(f_k).$$

Ce résultat implique en outre le critère de stabilité appelé condition sous-caractéristique obtenue par le développement assymtotique de Chapman-Enskog qui pour ce système s'écrit comme :

$$\sum_{e=1}^{D} \sum_{d=1}^{D} \sum_k ((\lambda_k)_e (\lambda_k)_d M_k'(u)\xi_d, \xi_e) \geq \sum_{e=1}^{D} \sum_{d=1}^{D} (F_e'(u) F_d'(u)\xi_d, \xi_e)$$

pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_D) \in (\mathbb{R}^p)^D$ et pour tout u dans $\mathcal{U}$. Dans les paragraphes suivants nous donnons quelques exemples de modèles et de schémas utilisant ce formalisme.

4.4 Problème 1D système

En une dimension le système (4.7) s'écrit

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0 \tag{4.13}$$

avec $u \in \mathbb{R}^p$ On suppose que le système est hyperbolique, c'est-à-dire que les $(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$, $q \leq p$ valeurs propres de la matrice F' sont réelles, et que F' admet un symétriseur. L'écriture de (4.10) en une dimension d'espace devient

$$\partial_t f_k^\epsilon + \lambda_k \partial_x f_k^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(M_k(u) - f^\epsilon) \tag{4.14}$$

avec f^ϵ de dimension p. Le système approchant (4.13) est de taille $(N \cdot p)$, et λ_k est un réél.

Pour le cas sans bord, un problème bien connu associé au système (4.13) est le problème de Riemann qui correspond à une condition initiale composée de deux états constants (voir [30]) :

$$u^0(x) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x > 0 \end{cases}$$

On rappelle que dans ce cas le système (4.13) développe une succession d'ondes qui s'ouvrent et le problème est auto-similaire, c'est-à-dire que la solution se construit comme suit :

$$u(t,x) = w(\frac{x}{t}) \;\; x \in \mathbb{R} \; t \geq 0$$

avec w une fonction régulière par morceaux qui parcourt les $(q-1)$ états reliés par les q ondes.

Pour le problème avec bord, sans hypothèses supplémentaires sur la nature des valeurs propres, on ne peut pas garantir que le problème reste bien posé si l'on impose

$u_b(t) = u_l$ pour tout t et $u^0(x) = u_r$ pour tout x. On ne sait pas non plus si les conditions aux limites cinétiques permettent d'assurer que la solution obtenue pourra s'écrire

$$u(t,x) = w(\frac{x}{t})$$

pour tout t et x positifs. Nous présentons deux exemples numériques qui montrent que si le bord est caractéristique pour l'équation (4.13) c'est-à-dire si le vecteur u_b satisfait

$$\det(F'(u_b)) = 0$$

et que F' contient une valeur propre linéairement dégénérée, alors on ne peut pas identifier la solution du problème de Riemann w pour le problème de Cauchy restreinte au quart de plan positif, et la solution autosimilaire obtenue pour le problème de bord.

4.4.1 Les équations d'Euler en une dimension d'espace et le modèle cinétique à deux vitesses

Nous discrètisons les équations d'Euler en formulation eulerienne, qui s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t E + \partial_x((E+p)v) = 0. \end{array} \right. \tag{4.15}$$

où ρ, v, p et E sont respectivement la densité, vitesse, pression et energie totale d'un gaz parfait. La pression ferme le système (4.15) si elle est définie par :

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho v^2) \ . \tag{4.16}$$

avec $\gamma = 1.4$.

Nous utilisons le modèle de la relaxation, qui donne les maxwelliennes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_+(u) = \frac{1}{2}[u + \frac{F(u)}{\lambda}] \\ \\ M_-(u) = \frac{1}{2}[u - \frac{F(u)}{\lambda}] \end{array} \right.$$

où par définition de (4.15),

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} \text{ et } F(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (E+p)v \end{pmatrix}$$

A condition de prendre $\lambda > \sigma(F')$, on voit que ce modèle, satisfait le critère de stabilité

$$\eta'' M'_{\pm} > 0$$

exhibé par F. Bouchut dans [7] et mentionnée plus haut. Pour le moment, il n'existe pas de modèle cinétique qui satisfasse ce critère dont les maxwelliennes ne soient pas des combinaisons linéaires de u et de F.

Comme dans le cas scalaire, le schéma complet, à l'ordre un, s'écrit, pour tout $i \geq 0$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[F(u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n)] + \frac{\lambda \Delta t}{2\Delta x}\left[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right]$$

avec

$$u_{-1}^n = u_b^n.$$

Pour les deux essais 1D suivants, nous utilisons un maillage structuré avec mille points et le schéma présenté ci-dessus. Ce choix est motivé par la certitude qu'à l'ordre un, les inégalités d'entropie sont garanties au moins pour le cas scalaire. Pour des approximations d'ordre plus élevées, on ne peut pas avancer les mêmes arguments.

Tube à choc de Sod

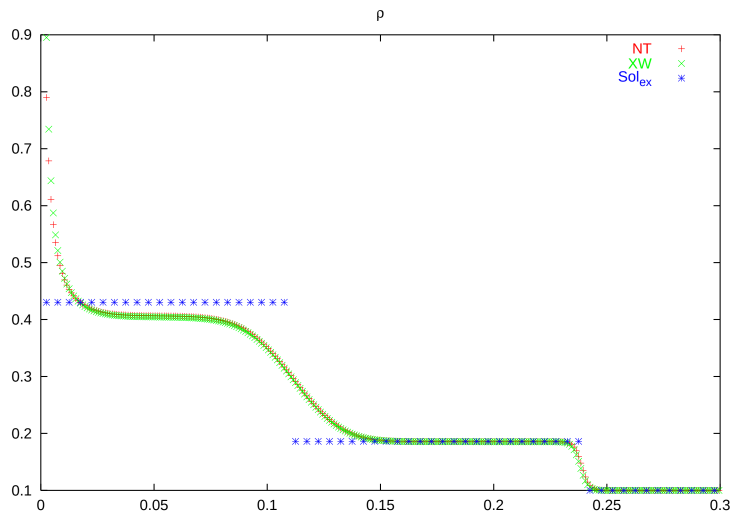
Sur la frontière on impose l'état

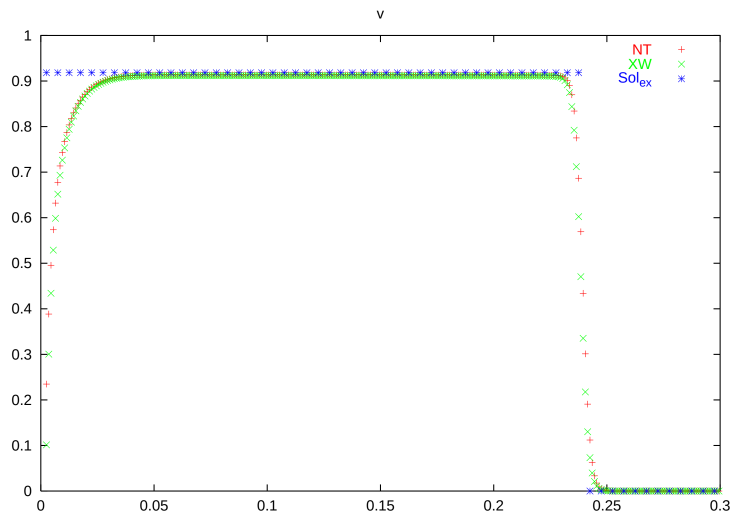
$$u_b = \begin{cases} \rho = 1.0 \\ v = 0.0 \\ p = 1.0 \end{cases}$$

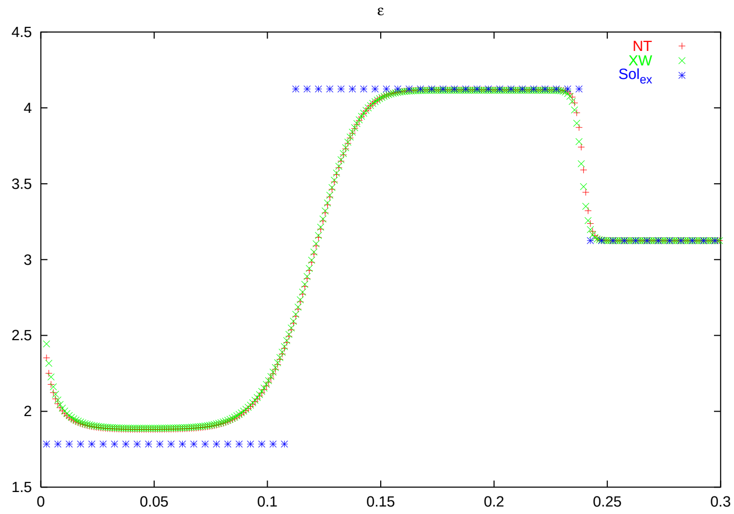
et à l'intérieur du domaine la condition initiale vaut

$$u^0(x) = \begin{cases} \rho = 0.1 \\ v = 0.0 \\ p = 0.125 \end{cases}$$

pour tout $x \geq 0$.







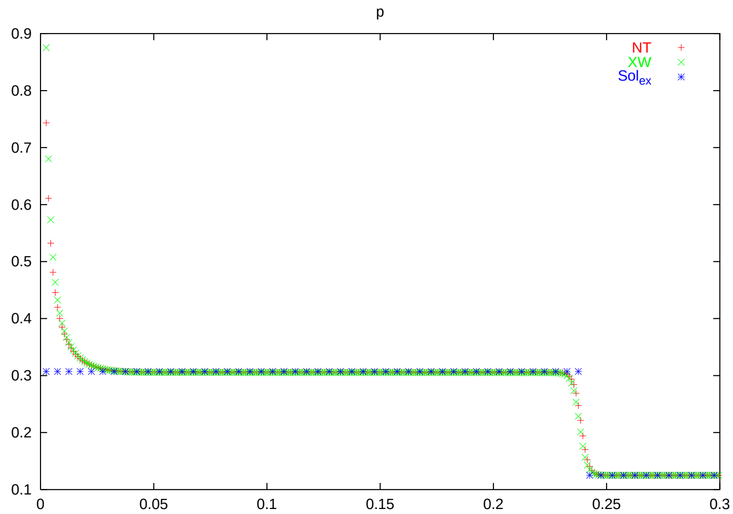


FIG. 4.7 – Tube à choc de Sod +bord, densité, vitesse, energie interne, pression

On constate que la solution numérique n'est pas la restriction sur le quart de plan $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^+$ du problème de Riemann classique mais qu'un autre 1-état intermédiaire apparaît. Pour pouvoir comparer, on a représenté la demi solution exacte du problème de Riemann pour le problème de Cauchy avec $u_l = u_b$ et $u_r = u^0$. Cette restriction fait que sur les figures on ne voit pas apparaître la 1-détente.

Pour montrer que l'état intermédiaire obtenu ne dépend pas de la condition aux limites choisie, nous montrons la solution XW qui correspond à la condition Dirichlet $f_{+,b}^n + f_{-,b}^n = u_b$, et la solution NT représente le schéma muni de la condition $f_{+,b}^n = M_+(u_b)$. Voir figures 4.7.

Tube à choc de Lax

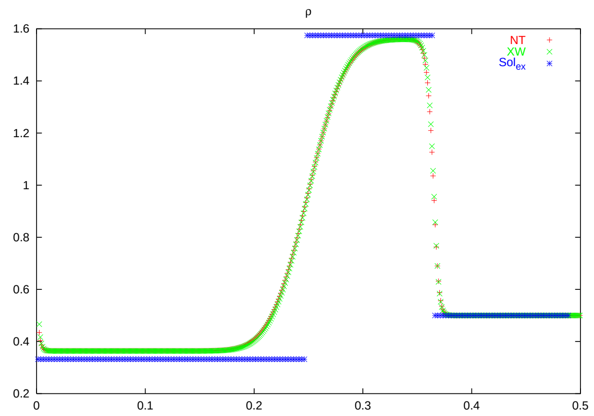
Sur la frontière on impose l'état

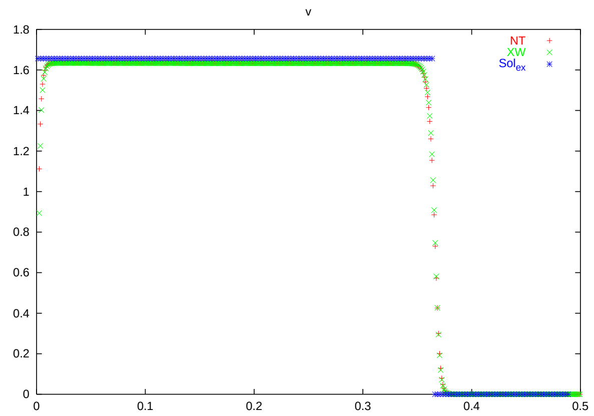
$$u_b = \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0.444813234 \\ v = 0.7 \\ p = 3.59869497 \end{array} \right.$$

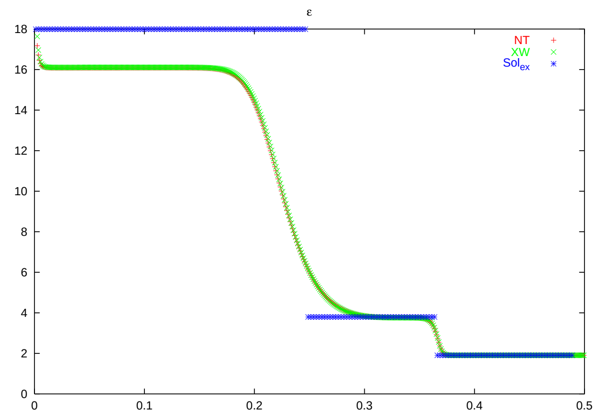
et à l'intérieur du domaine, en $t = 0$,

$$u^0(x) = \begin{cases} \rho = 0.5 \\ v = 0.0 \\ p = 0.380666644 \end{cases}$$

pour tout $x \geq 0$.







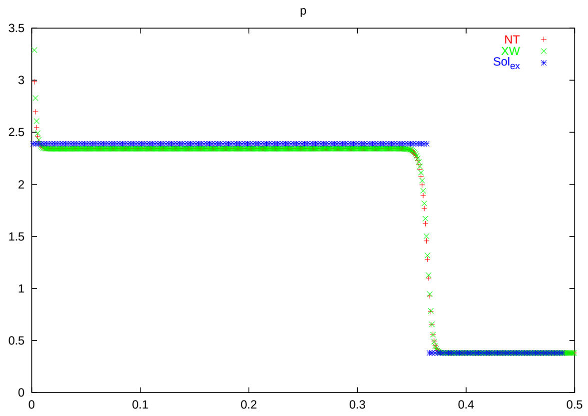


FIG. 4.8 – Tube à choc de Lax+bord, densité, vitesse, energie interne, pression

On peut faire la même observation que précédemment, on ne développe pas un problème de Riemann classique sur le bord mais un autre 1-état intermédiaire apparaît, cet effet est visible surtout sur les variables ρ et ϵ, l'énergie interne. Pour conclure, on constate que la différence ne disparaît pas lorsque le pas de discrétisation Δx diminue. Une explication possible est qu'en $x = 0$ une discontinuité de contact apparaît et reste tengeante au bord, ce qui donne ce nouvel état près de la frontière.

4.4.2 Parois réfléchissantes pour la dynamique des gaz

Dans cette partie, nous n'imposons plus de condition constante au bord, mais la réflexion des particules sur une paroi solide. Si le vecteur vitesse en trois dimensions d'espace s'écrit

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

alors cela revient à imposer

$$\overrightarrow{v}(t,x) \cdot \overrightarrow{\nu}(x) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

$\overrightarrow{\nu}(x)$ étant le vecteur normal sortant pour tout x du bord $\partial\Omega$.

Pour le problème 1D qui nous occupe, cela revient à exiger que en $x = 0$, $v(t,x) = 0$, pour tout $t \geq 0$. Dans la suite, on utilise le schéma de Lax-Friedrichs présenté plus haut. On suppose que u_0^n, la valeur de la solution numérique dans la première maille, s'écrit comme

$$u_0^n = \begin{pmatrix} \rho_0^n \\ v_0^n \rho_0^n \\ E_0^n \end{pmatrix}.$$

Pour exprimer la condition de réflexion, nous imposons pour le modèle à deux vitesses

$$f_{+,b}^n = M_+(u^*) \tag{4.17}$$

où

$$u^* = \begin{pmatrix} \rho_0^n \\ -v_0^n \rho_0^n \\ E_0^n \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.4.1 *Pour le schéma à deux vitesses, la condition aux limites (4.17) implique que la vitesse ($v_{-\frac{1}{2}}^n(t)$) est nulle sur la première interface ($x_{-\frac{1}{2}}$) du maillage.*

Preuve : Pour mieux comprendre, on peut s'aider de la figure suivante :

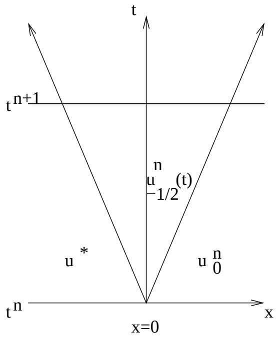


FIG. 4.9 – Solution à l'interface

Sur l'interface, au cours du transport, avant d'intégrer la solution en espace, pour un schéma du premier ordre, on a un bilan de la condition au bord et de l'information qui vient de l'intérieur du maillage. Comme on manipule des constantes par maille, on peut écrire, pour $t \in [t^n, t^{n+1}[$:

$$u_{-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(t) = f_{+,b}^n + M_-(u_0^n) = M_+(u^*) + M_-(u_0^n)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u_{-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(t) = \ & \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \rho \\ -\rho v \\ E \end{pmatrix} + \tfrac{1}{\lambda} F\begin{pmatrix} \rho \\ -\rho v \\ E \end{pmatrix}\right] \\ & +\tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} - \tfrac{1}{\lambda} F\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

pour simplifier les notations on omet les indices de $(\rho_0^n, (\rho v)_0^n, E_0^n)$. Or

$$F\begin{pmatrix} \rho \\ -\rho v \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho v \\ p + \rho v^2 \\ -(E+p) * v \end{pmatrix}$$

tandis que

$$F\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ p + \rho v^2 \\ (E+p) * v \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$u_{-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(t) = \left[\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} -\rho v \\ 0 \\ -(E+p)v \end{pmatrix}\right]$$

on voit donc bien que

$$\frac{(u_{-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(t))_2}{\rho_{-\frac{1}{2}}^n(t)} = v_{-\frac{1}{2}}^n(t) = 0$$

$\diamondsuit$

La quantité exhibée dans la précédente démonstration n'est pas utilisée dans le schéma. Cette quantité, fictive, illustre plutôt les raisons d'appliquer la condition de réflexion telle que nous l'avons formulée.

Pour montrer les effets cette condition aux limites, nous allons produire un problème de Riemann à l'intérieur du domaine qui viendra se refléter sur les bords en $x = 0$ et en $x = 1$.

Nous utilisons le schéma relaxé d'ordre deux en espace, avec toujours le même pas de discrétisation $\Delta x = 0.001$. (voir figures 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13). Dans les limiteurs de pentes de la cellule 0, on impose, comme c'est usuel dans la littérature, les vitesses réfléchies, c'est à dire que si l'on désigne par $(\cdot)^*$, l'inversion de vitesse décrite précédemment, dans les limiteurs de la cellule 0, ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma^n_{0,k} = \min\bmod\left(M_k(u^n_1) - M_k(u^n_0), M_k(u^n_0) - M_k(u^{n,*}_0)\right) \\ \\ \sigma^n_{-,k} = \min\bmod\left(M_k(u^n_0) - M_k(u^{n,*}_0), M_k(u^{n,*}_0) - M_k(u^{n,*}_1)\right) \end{array}\right. \quad \forall k \text{ t.q. } \lambda_k > 0$$

Double mur : Tube à choc de Sod

On impose un état gauche et un état droit à l'intérieur du maillage.

$$u_0(x) = \left\{\begin{array}{ll} u_l & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \\ u_r & \text{sinon} \end{array}\right.$$

avec

$$u_l = \begin{pmatrix} \rho = 1.0 \\ v = 0.0 \\ p = 1.0 \end{pmatrix}$$

et

$$u_r = \begin{pmatrix} \rho = 0.1 \\ v = 0.0 \\ p = 0.125 \end{pmatrix}$$

D'abord, le problème de Riemann se développe à l'intérieur du domaine de façon classique. Lorsque la 1-détente et le 3-choc touchent les bords, les intéractions d'ondes commencent. Sur les figures 4.10, 4.11 et 4.12, on voit que le 3-choc, se reflète sur les murs de façon très sensible. En $(t = 0.4, x = 0.8)$, on voit que lorsque la discontinuité de contact traverse le 3-choc, ce dernier est affaibli. En même temps, de part et d'autre de la discontinuité, il se crée un 1-état à sa gauche et un 2-état à sa droite visibles sur la figure 4.13 à $t = 0.56006$. Entre le 2-état et le mur se propage alors un 3-choc visible sur les vitesses et les pressions. Ce nouveau 3-choc se reflète à son tour sur le mur droit en $t = 0.44$ Pendant ce temps sur l'autre bord la détente se reflète petit à petit de $t = 0.42$ à $t = 0.8$. A ce moment là, près du mur gauche densité et pression sont presque constantes. La réflexion de la détente gauche traverse le 3-choc autour de $(t = 0.8, x = 0.5)$. Quand la détente rencontre le 1-état résultat du 3-choc traversé par la discontinuité de contact, une détente se crée, visible sur les figures 4.13 pour $t = 0.80067$, $t = 1.04$ et $t = 1.280$. Comme l'énergie du système se conserve, ce type de phénomènes se propage même pour des temps assez longs.

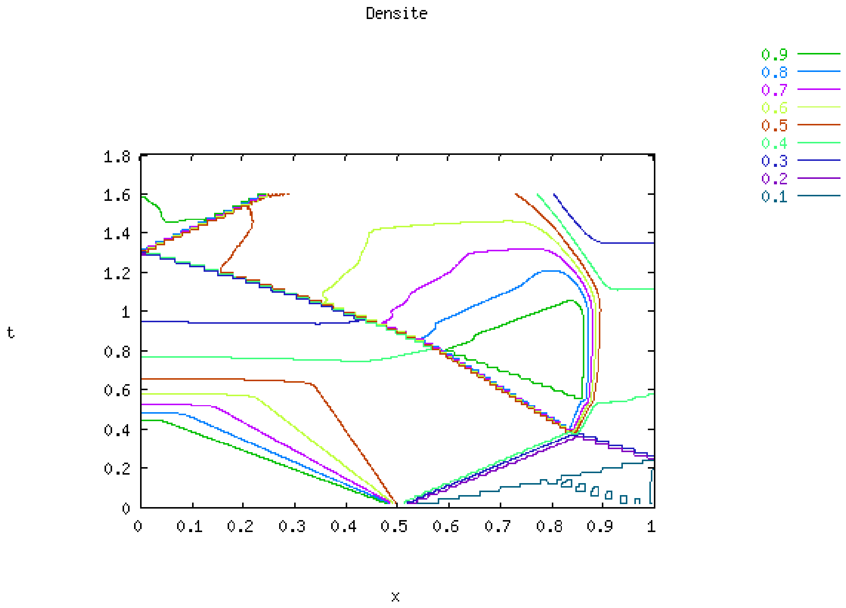


FIG. 4.10 – densité

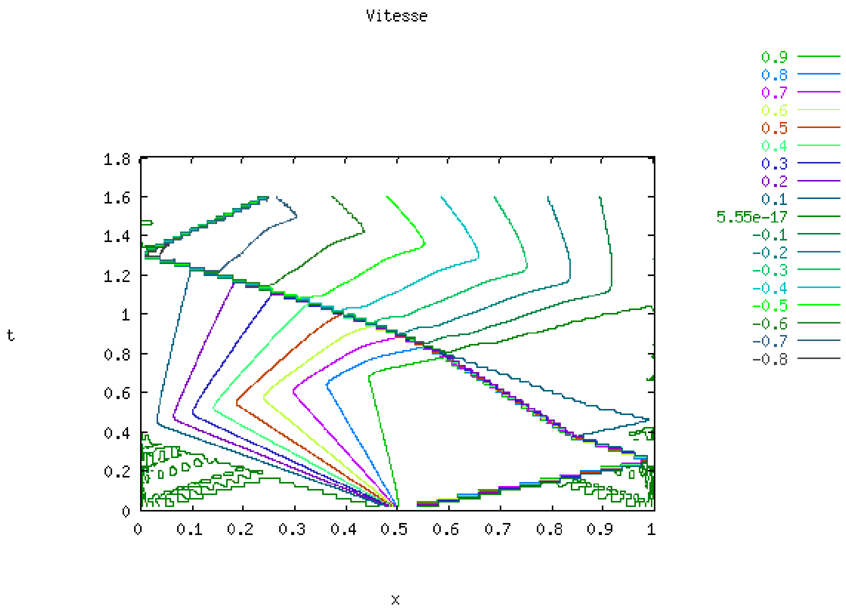


FIG. 4.11 – vitesse

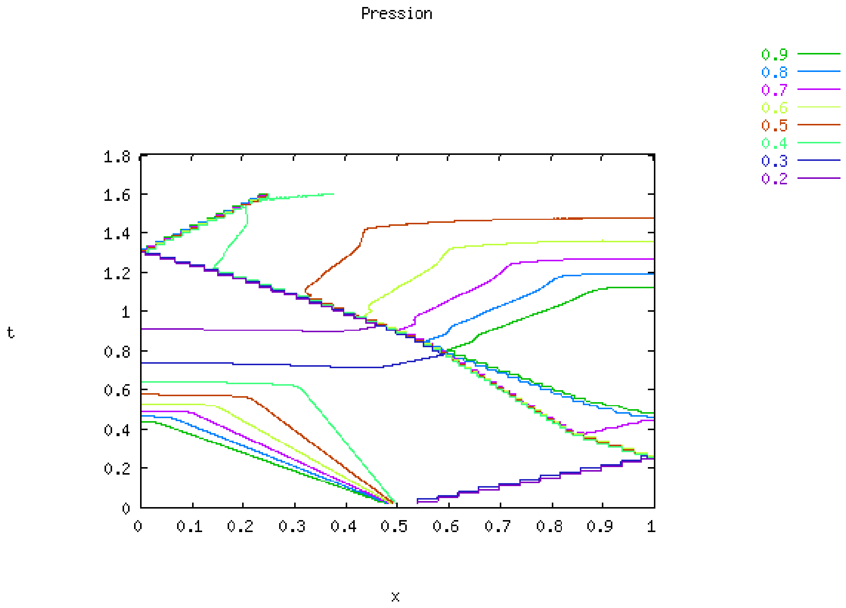
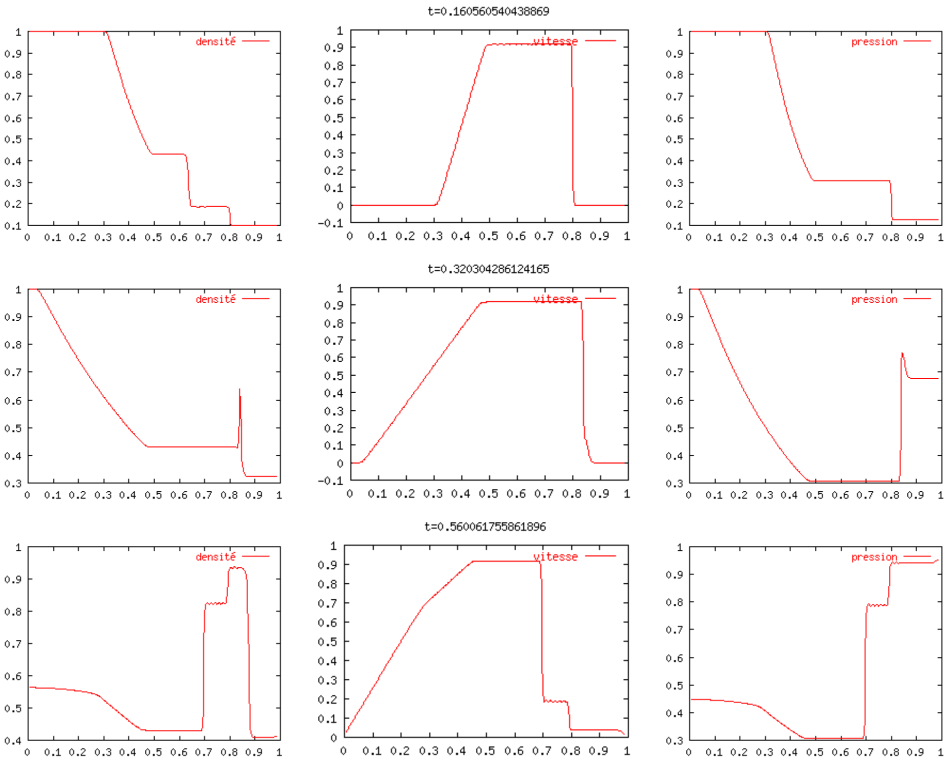


FIG. 4.12 – pression



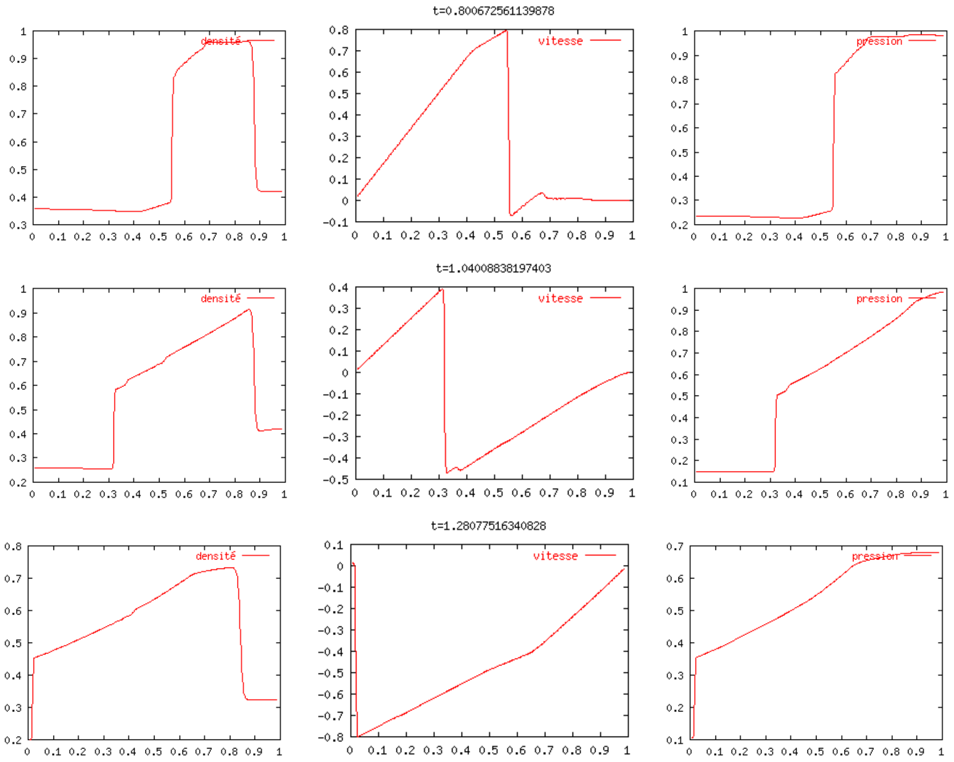


FIG. 4.13 – Évolution des quantités (ρ, v, p) au cours du temps

Double mur : apparition du vide

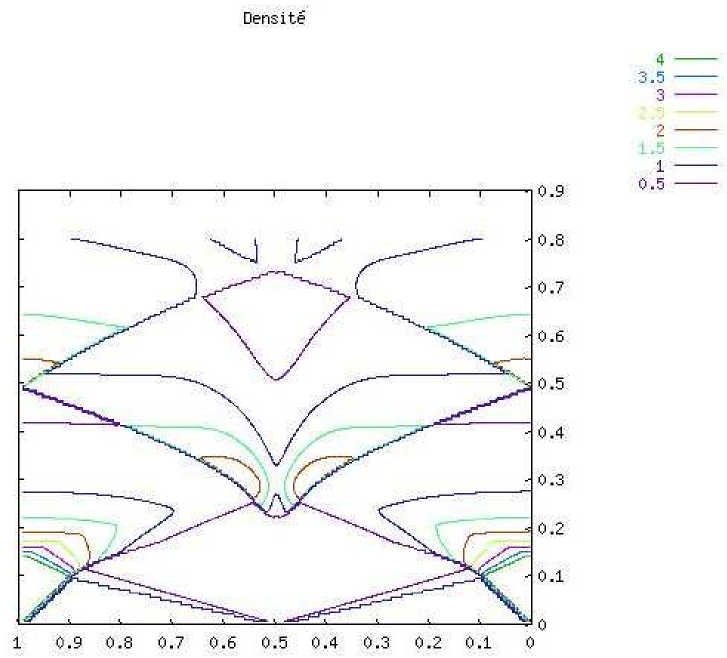
Pour ce test on impose toujours la réflexion en $x = 0$ et $x = 1$. La condition initiale dans la moitié gauche du domaine est :

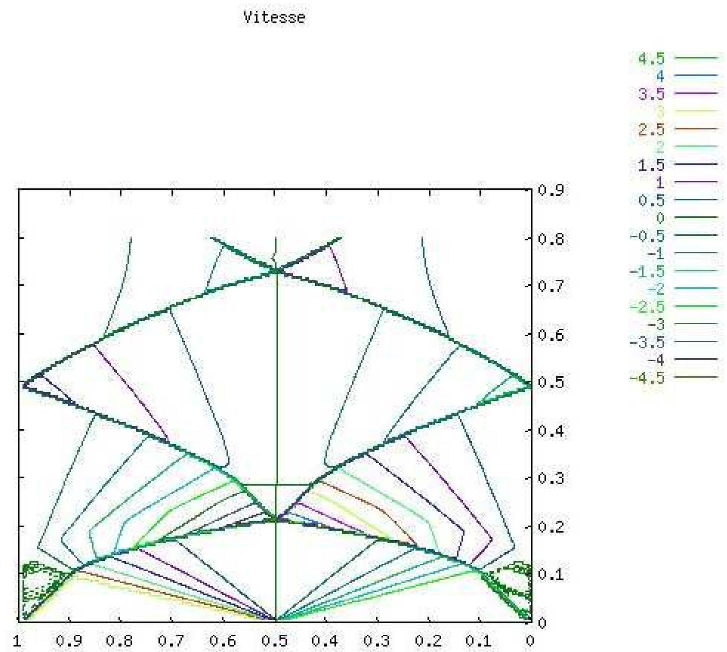
$$u_l = \begin{pmatrix} \rho = 1.0 \\ v = -3.0 \\ p = 1.0 \end{pmatrix}$$

et à droite

$$u_r = \begin{pmatrix} \rho = 1.0 \\ v = 3.0 \\ p = 1.0 \end{pmatrix}$$

Ce cas test est connu pour le problème de Cauchy. Entre deux murs, on observe un comportement oscillant, qui pourtant ne semble pas périodique. Les intéractions d'ondes sont multiples. (voir figures 4.14, 4.15 et 4.17) Dans le cas de Cauchy, comme avec bord, ce problème illustre la robustesse des schémas cinétiques. La diffusion naturelle du schéma préserve la positivité des densité et pression.


Densité
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0


Vitesse
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0

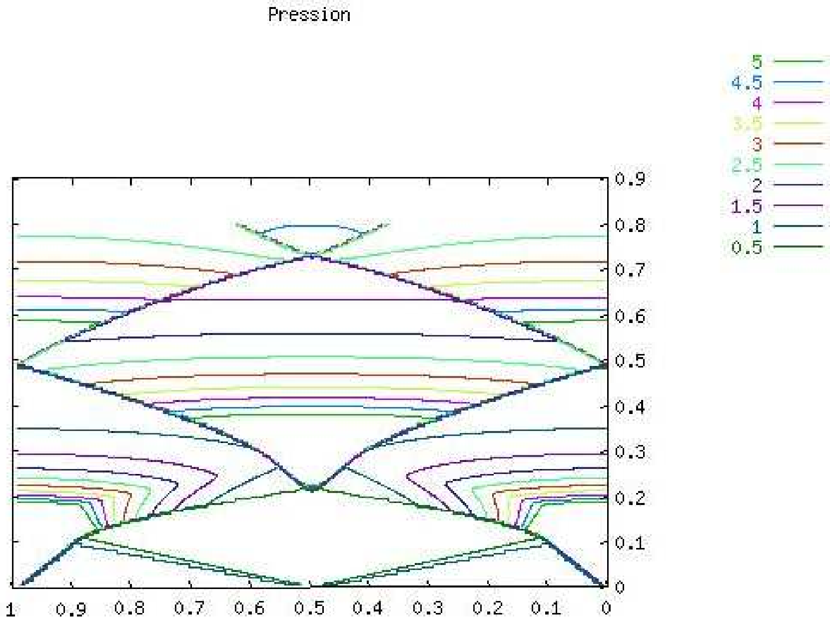
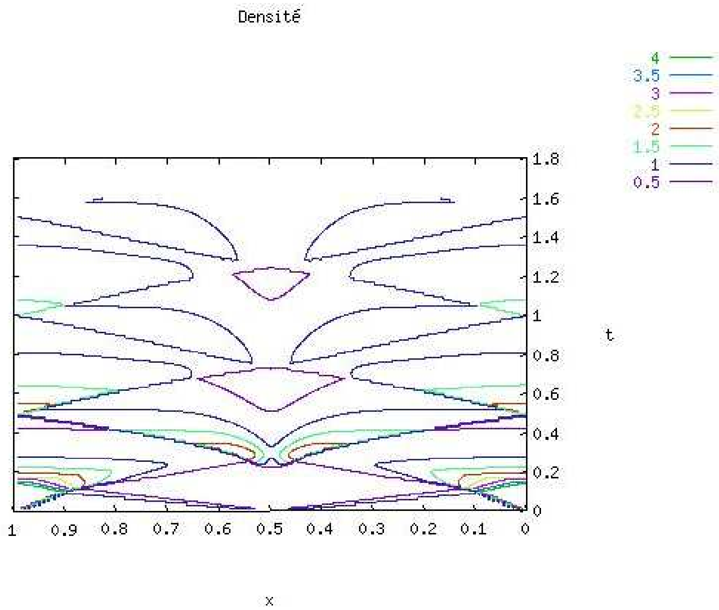
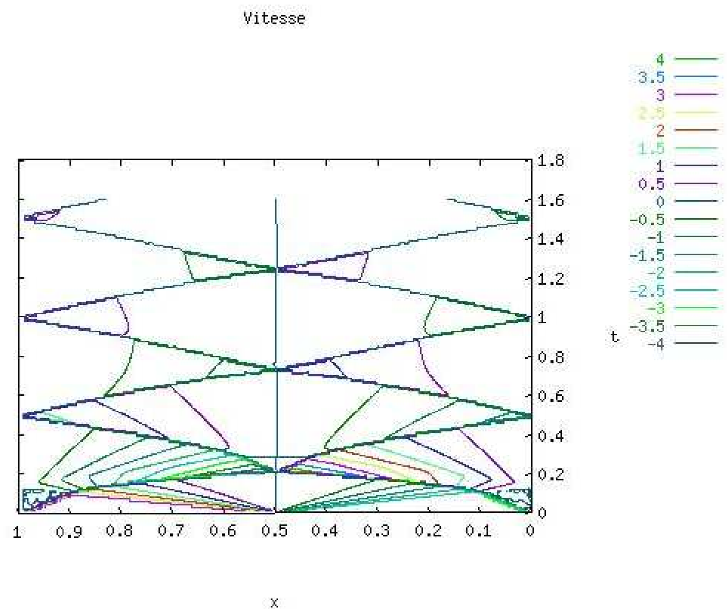


FIG. 4.14 – Problème symétrique avec murs: isovaleurs





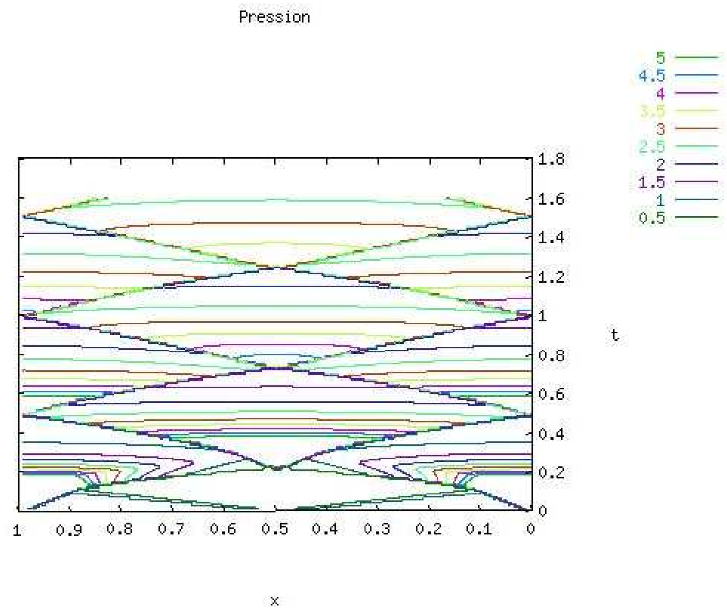


FIG. 4.15 – Comportement en temps plus long isovaleurs dans le plan (x, t)

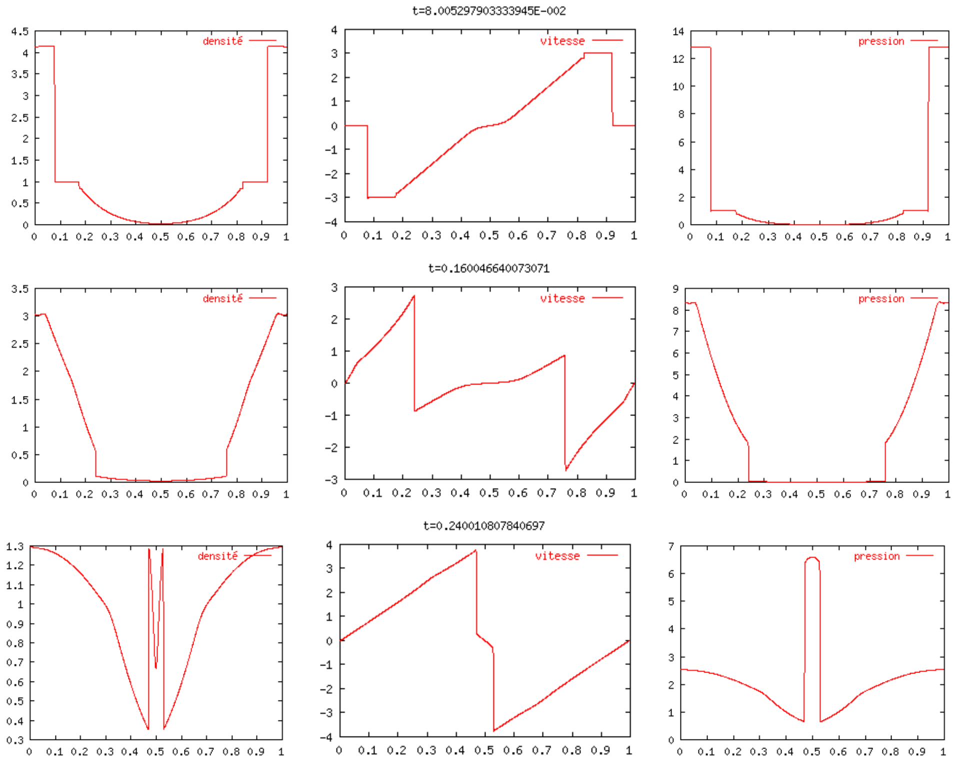


FIG. 4.16 – Apparition du vide (ρ, v, p) au cours du temps

Sur la figure précédente, nous montrons l'apparition du vide au tout début des calculs. Les schémas cinétiques supportent cette contrainte car la condition de dissipation est fixée uniformément sur tout le maillage. Cette uniformité permet d'éviter les problèmes d'instabilité au voisinage du vide.

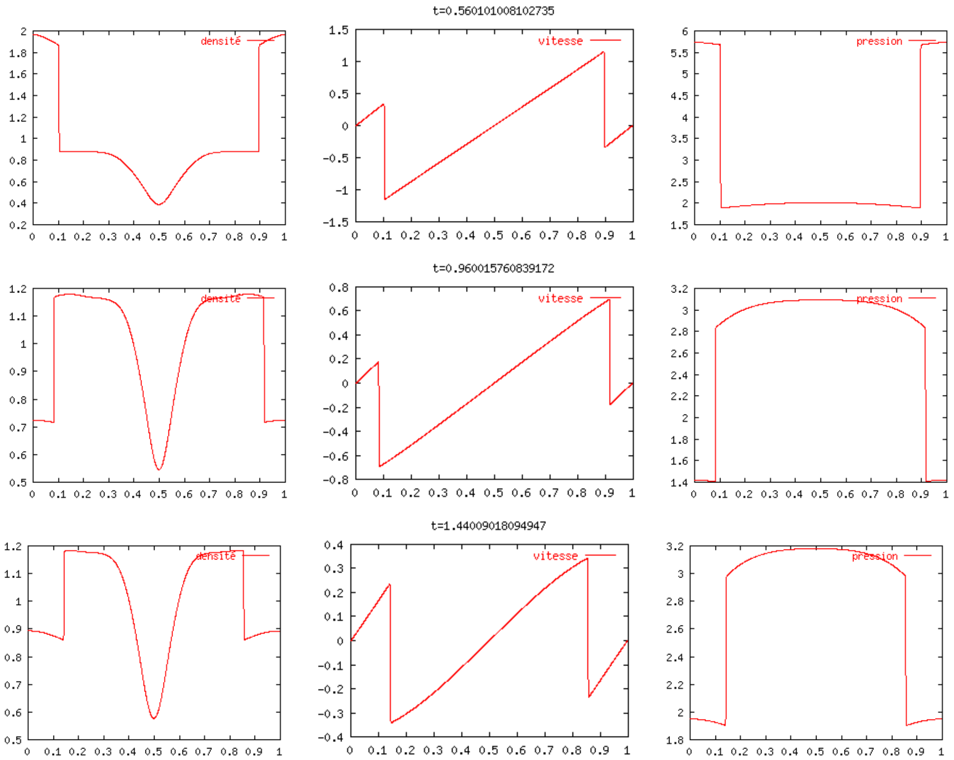


FIG. 4.17 – Évolution des quantités (ρ, v, p) au cours du temps

Sur cette figure, nous avons voulu montrer le caractère pseudo-périodique des solutions et illustrer ainsi les graphes 4.15 par des quelques valeurs données de t.

Les deux problèmes suivants sont des cas tests très connus, le lecteur peut par exemple se référer au célèbre article de P. Woodward et Ph. Colella [47].

Un benchmark 1D : Les "Blast Waves"

Dans ce cas test, on procède de la même manière au niveau des conditions limites, mais la condition initiale se compose de trois états qui ne se différentient que par le saut en pression.

$$p = \begin{cases} 1000 & x < \frac{1}{10} \\ 0.01 & x \in [\frac{1}{10}, \frac{9}{10}] \\ 100 & x > \frac{9}{10} \end{cases}$$

la densité est uniformément égale à un dans tout le maillage, tandis que la vitesse est nulle partout. Pour expliquer de façon intuitive les phénomènes complexes qui se produisent, on peut remarquer que les ondes issues de champs vraiment non linéaires (c.v.n.l) se reflètent sur les parois. Par exemple, après réflexion, une détente peut traverser un choc fort (c.v.n.l.), mais lorsqu'elle rencontre une discontinuité de contact une partie de l'onde est renvoyée et une partie transmise. Dans ce test, d'ailleurs seules les détentes sont réfléchies sur les parois en $x = 0$ et $x = 1$.

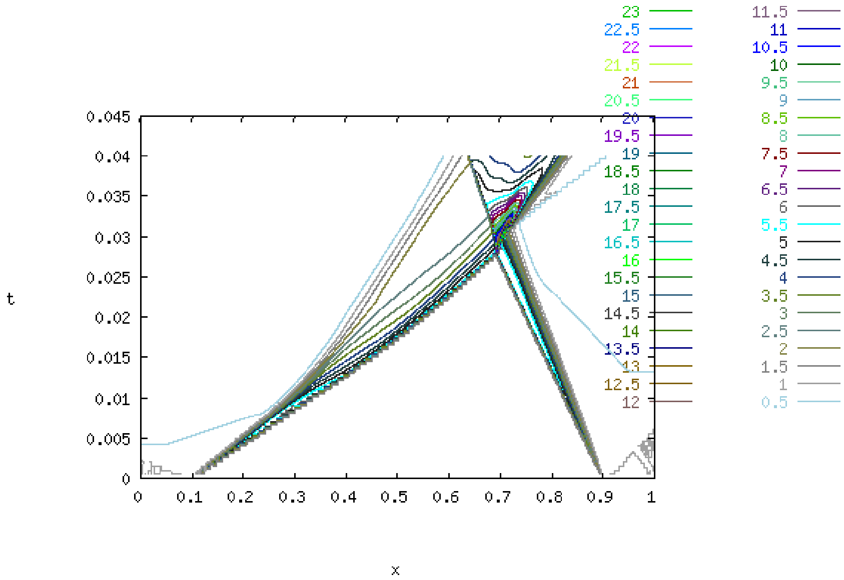


FIG. 4.18 – densité : isovaleurs

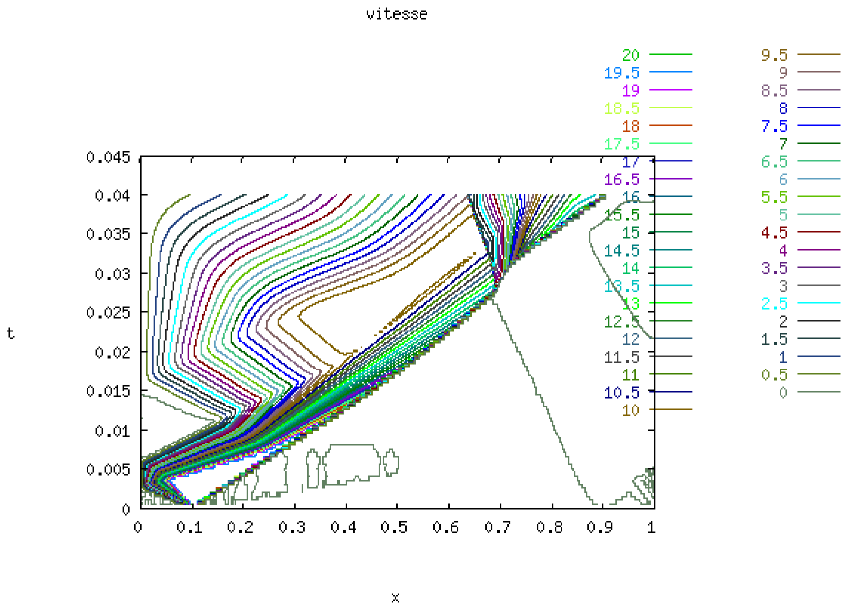


FIG. 4.19 – Problème “Blast Waves” avec murs: isovaleurs vitesse

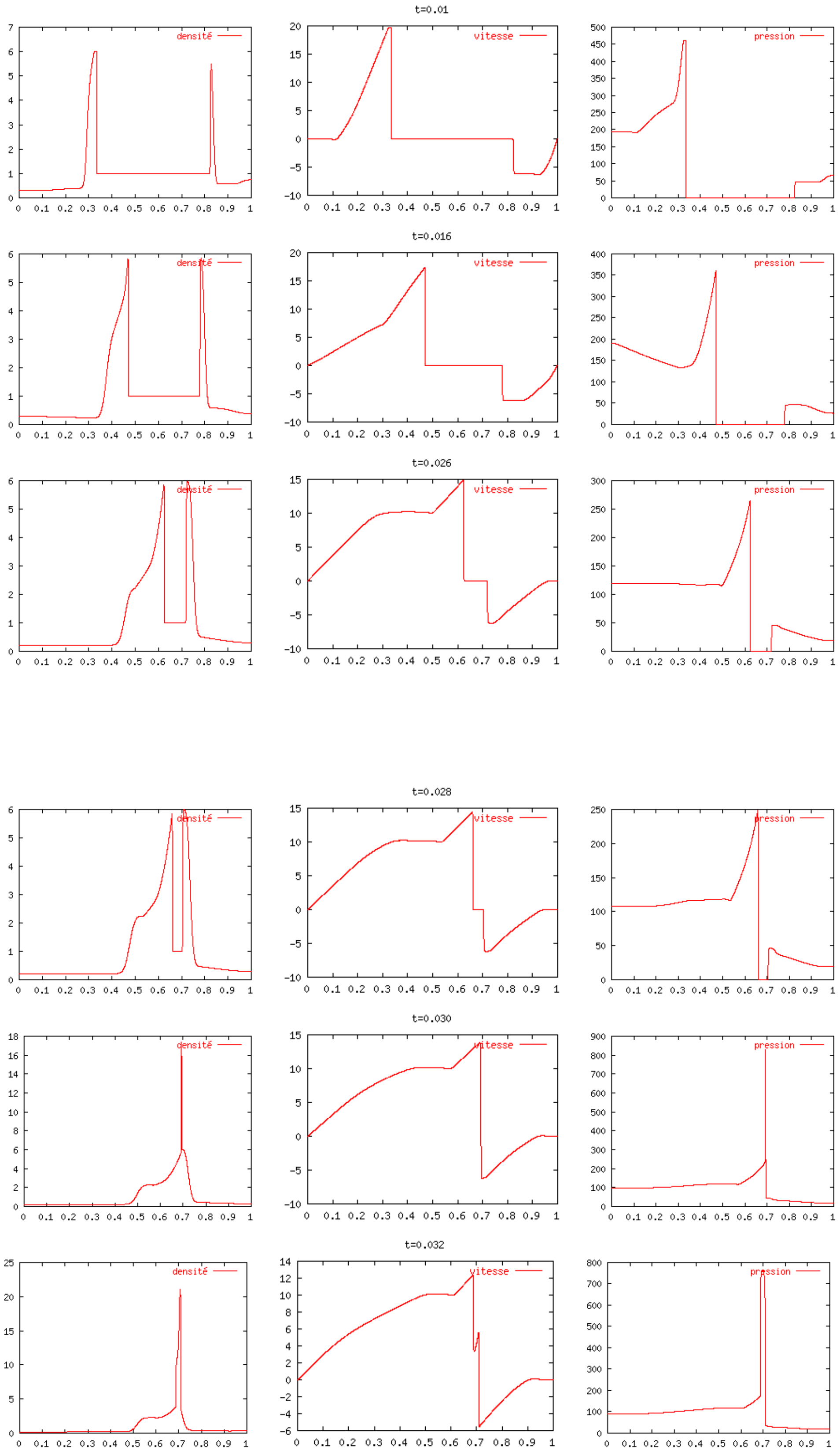


FIG. 4.20 – Evolution des quantités (ρ, v, p) au cours du temps

Sur les figures précédentes, on constate que la diffusion est très importante. Cela est dû à la vitesse du son

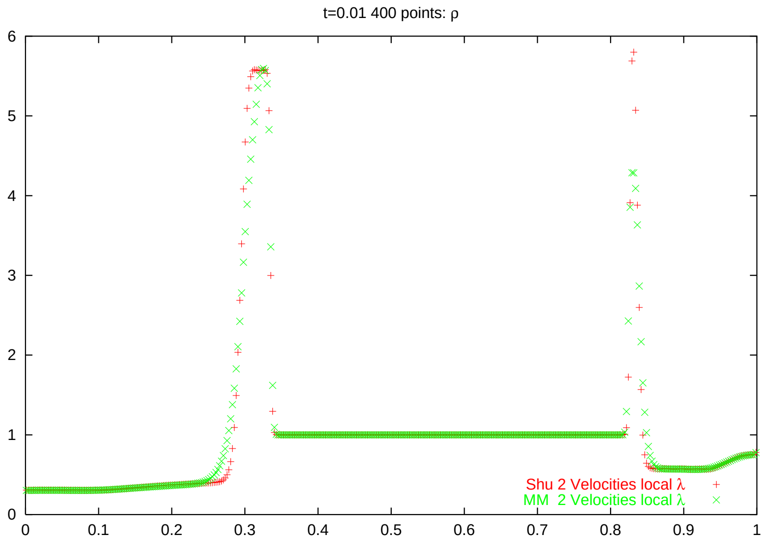
$$c = \sqrt{(\gamma - 1)\gamma \frac{p}{\rho}}.$$

Sur les données, suivant les régions cette grandeur varie du simple au centuple. Pour le modèle à deux vitesses, la condition de stabilité sur les maxwelliennes s'écrit :

$$\lambda > \max_{u \in \mathcal{U}} (|v| + c),$$

on voit qu'il est très important de minimiser le domaine de dépendance de la solution que l'on calcule au point i du maillage. Les quatre figures suivantes montrent des résultats de calculs où $\lambda_i = \max_{j \in V_i(i)} |v_j| + c_j$, avec $V_i(j)$ le domaine minimal de dépendance de la solution dans la maille i. Par exemple, pour un calcul du premier ordre en espace, on a $V_i(j) = \{i+1, i, i-1\}$. Plus on augmente l'ordre du schéma et plus ce voisinage s'élargit.

Les résultats suivants sont obtenus pour des schémas de transport élévés avec un maillage de 400 points. Les schémas qui utilisent le système de condition de dissipation locale sont soit le schéma WENO de Shu (courbe appelée "blas_shu_400_2v_loc"), soit le schéma MUSCL avec limiteurs de pentes $\min\bmod$ ("blas_mm_400_2v_loc"). La courbe intermédiaire représente un schéma avec condition de dissipation globale, mais avec des limiteurs de pentes introduits par Frédéric Lagoutière dans [20], utilisé avec une cfl de 0.6, cfl avec la quelle le schéma diffuse encore assez pour rester entropique, (sur le graphique ce schéma s'appelle "blas_lag_400_glob_cfl0.6"). On voit que le transport WENO donne les meilleurs résultats, suit le schéma global avec limiteurs de pente de Lagoutière, puis en dernier, le schéma du second ordre en espace avec limiteurs $\min\bmod$.



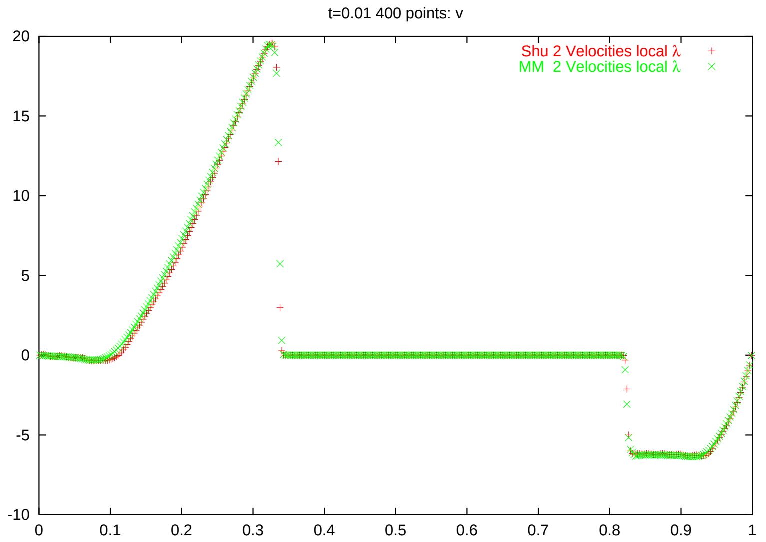
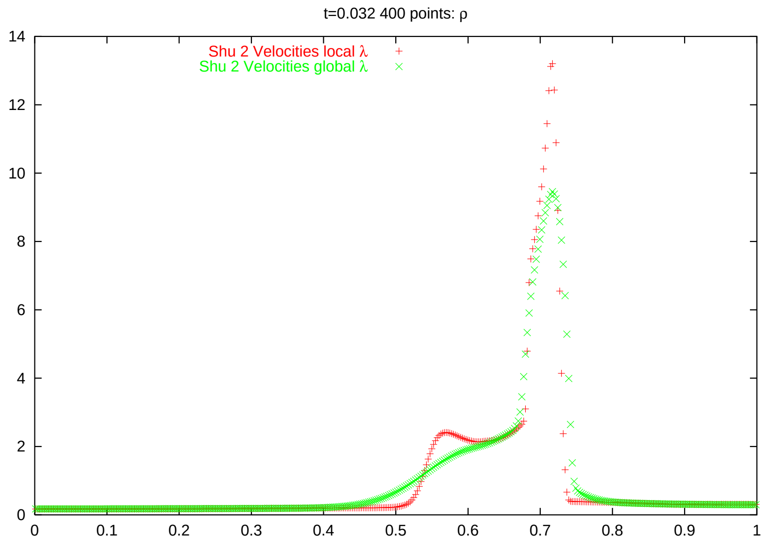


FIG. 4.21 – Densité ρ et vitesse u à t=0.01



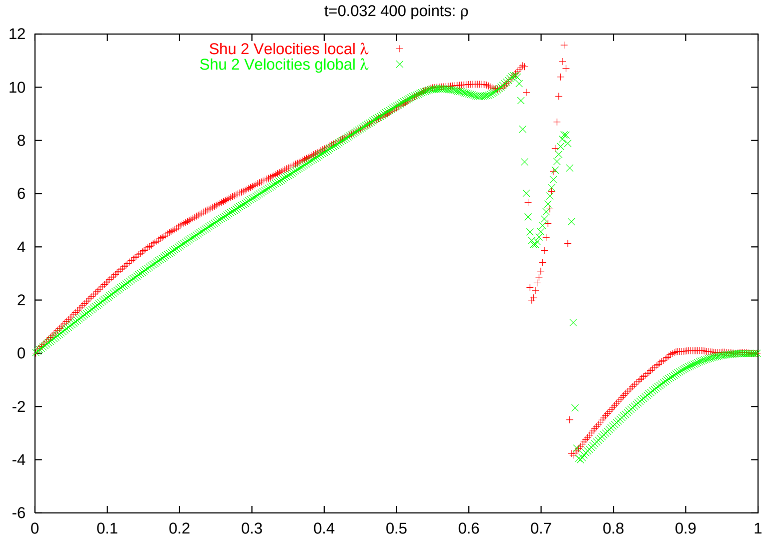


FIG. 4.22 – ρ et u à t=0.032

4.4.3 Euler 2D

Pour finir, nous discrétisons les équations bidimensionneles pour la dynamique des gaz compressibles :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho u v) = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v u) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0 \\ \partial_t E + \partial_x((E+p)u) + \partial_y((E+p)v) = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Tunnel avec marche

Nous présentons ici un problème en deux dimension d'espace très connu et testé souvent dans la littérature (voir [47]). Dans un canal de 3 unités de long et de 1 unité de haut, on fait passer un fluide à MACH 3. La marche est située à 0.2 unités en hauteur et est éloignée de 0.6 unités de l'entrée du tunnel. Le tunnel est supposé infiniment large dans la direction orthogonale au plan de calcul. A gauche, on impose une condition d'entrée qui est égale à la condition initiale. La condition de sortie n'a aucun effet sur l'écoulement, parce que la vitesse de sortie est toujours supersonique. Le tunnel est rempli d'un gaz parfait avec $\gamma = 1.4$. (Voir figure 4.23).

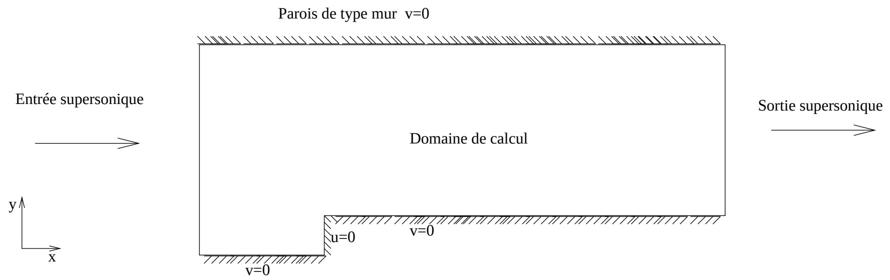


FIG. 4.23 – Dessin du domaine de calcul et des conditions aux limites

Le long des murs du tunnel, on impose des conditions aux limites réflexives. Le coin de la marche est le centre d'un éventail de raréfaction et par conséquent est un point singulier de l'écoulement. Ce cas test est particulièrement difficile car les erreurs d'approximation faites au coin de la marche provoquent une couche limite de quelques mailles sur le dessus de la marche. Les chocs réagissent alors sur la couche limite, et la nature qualitative de l'écoulement dans le tunnel est altérée de façon plus ou moins importante.

Le schéma à 4 vitesses

Pour cette simulation nous avons utilisé le modèle cinétique suivant :

- Pour les vecteurs vitesse

$$\overrightarrow{\lambda_1} = \lambda_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\lambda_2} = \lambda_y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\lambda_3} = \lambda_x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\lambda_4} = \lambda_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- alors que les maxwelliennes associées sont

$$M_1(u) = \tfrac{1}{4}[u + \tfrac{2F}{\lambda_x}]$$

$$M_2(u) = \tfrac{1}{4}[u - \tfrac{2G}{\lambda_y}]$$

$$M_3(u) = \tfrac{1}{4}[u - \tfrac{2F}{\lambda_x}]$$

$$M_4(u) = \tfrac{1}{4}[u + \tfrac{2G}{\lambda_y}]$$

F (resp. G) est le flux dans la direction x (resp. y). Pour résoudre la partie transport, nous avons utilisé des schémas d'ordre deux en espace et le modèle est trop diffusif pour que le code converge vers la solution stationnaire correcte. Pour pallier ce défaut, nous avons utilisé les limiteurs mis au point par F. Lagoutière et B. Després (voir [20]). Même si le choc fort réussit à rebondir parfaitement sur les parois des oscillations demeurent dans les parties plus régulières de l'écoulement. En utilisant des limiteurs de pente normaux, comme ceux de VanLeer ou de type $\min\mathrm{mod}$, les approximations demeurent pertinentes jusquà la deuxième réflexion. Après, on constate la création d'un tourbillon en vitesse v_y qui éloigne la réflexion du choc de la paroi du tunnel. Cet effet semble disparaître si on diminue la dissipation du schéma. (voir figures 4.24, 4.25, et 4.26)

Schéma à 5 vitesses

Pour limiter la diffusion introduite par le modèle précédent, nous avons implémenté un schéma à 5 vitesses, en deux dimensions d'espace. Si F et G sont les flux définis précédemment, on a 5 vecteurs maxwelliennes de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ qui s'écrivent

$$M_1(u) = \frac{F_+(u)+G_+(u)}{2\lambda} \qquad \overrightarrow{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2(u) = \frac{F_+(u)-G_-(u)}{2\lambda} \qquad \overrightarrow{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_3(u) = u - \sum_{i\neq 3} M_i(u) \qquad \overrightarrow{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4(u) = \frac{-F_-(u)-G_-(u)}{2\lambda} \qquad \overrightarrow{\lambda_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_5(u) = \frac{-F_-(u)+G_+(u)}{2\lambda} \qquad \overrightarrow{\lambda_5} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

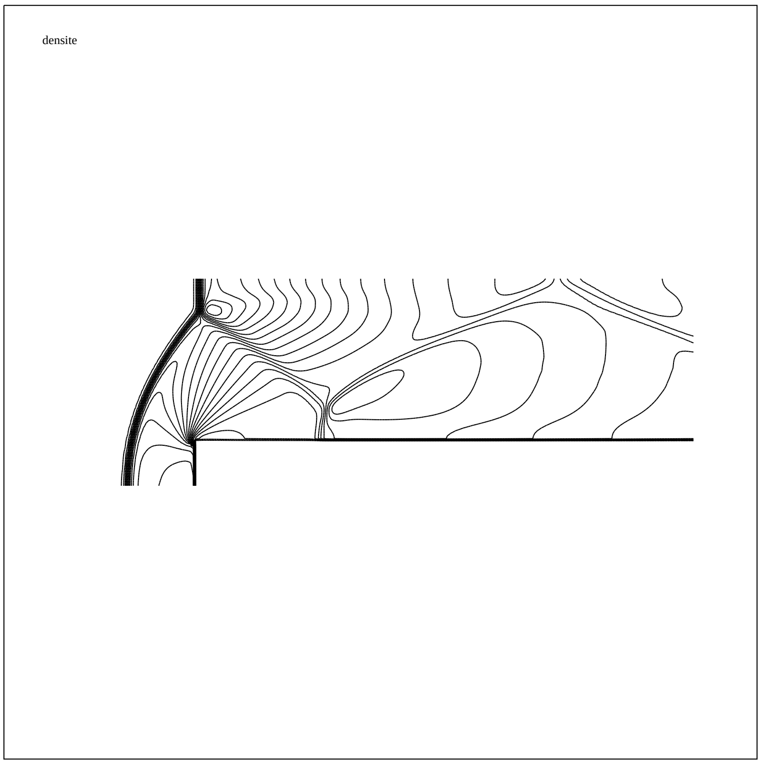
Avec

$$F_\pm(u) = \int_0^1 R(u_\theta(t))[D(u_\theta(t))]_\pm R^{-1}(u_\theta(t))dt(u-u_0)$$

avec $u_\theta(t) = u_0 + t(u - u^0)$. On pose $F'(u) = R(u)D(u)R^{-1}(u)$, et u^0 un état pour le quel toutes les valeurs propres sont nulles c'est-à-dire

$$\rho_0 > 0, \quad \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{0}, \quad p_0 = 0.$$

On définit $G_\pm$ de manière analogue. Ce schéma n'est pas entropique, on ne sait pas, d'ailleurs, si les maxwelliennes sont toujours définies positives. Il est présenté ici seulement parce que les résultats obtenus sur le cas test du tunnel, sont très performants. En effet, dans le cas du schéma avec trois vitesses, la diffusion est telle que l'on est obligé de forcer les schémas à la limite de la stabilité (ce qui explique les oscillations obtenues figure 4.26). Ce modèle dissipe beaucoup moins par la nature même du terme de collision. Les schémas qui en découlent le montrent.



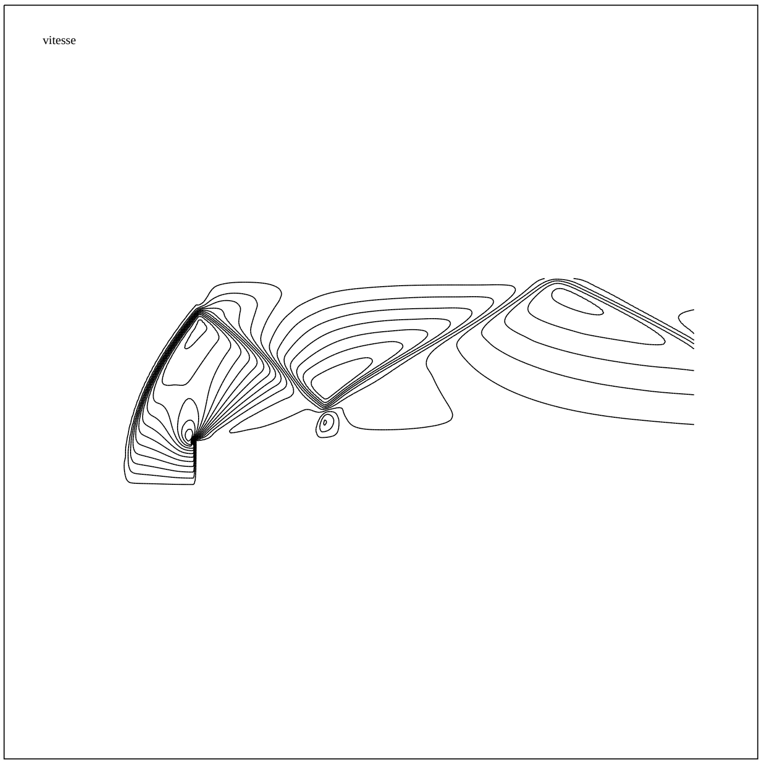
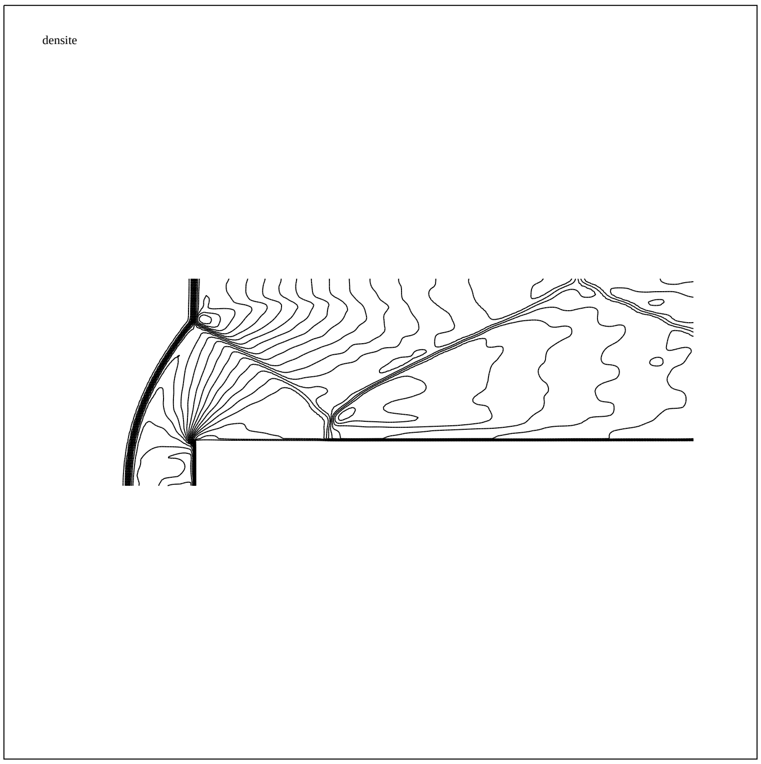


FIG. 4.24 – Résultat des calculs avec des limiteurs de type VanLeer, CFL=0.25, pour $t = 3.5$



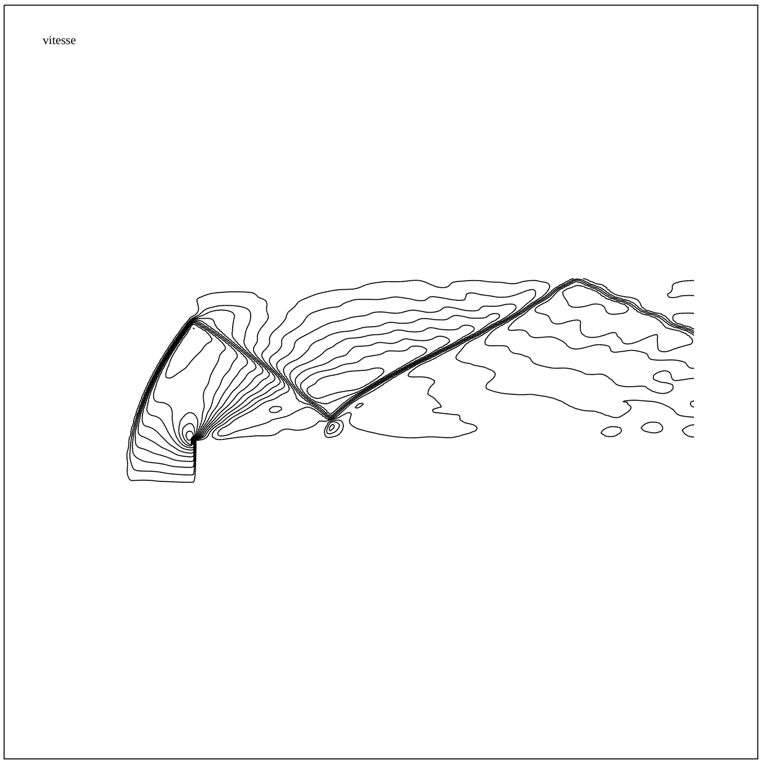


FIG. 4.25 – Résultat des calculs avec des limiteurs de type Lagoutière, CFL=0.5, pour $t = 3.5$

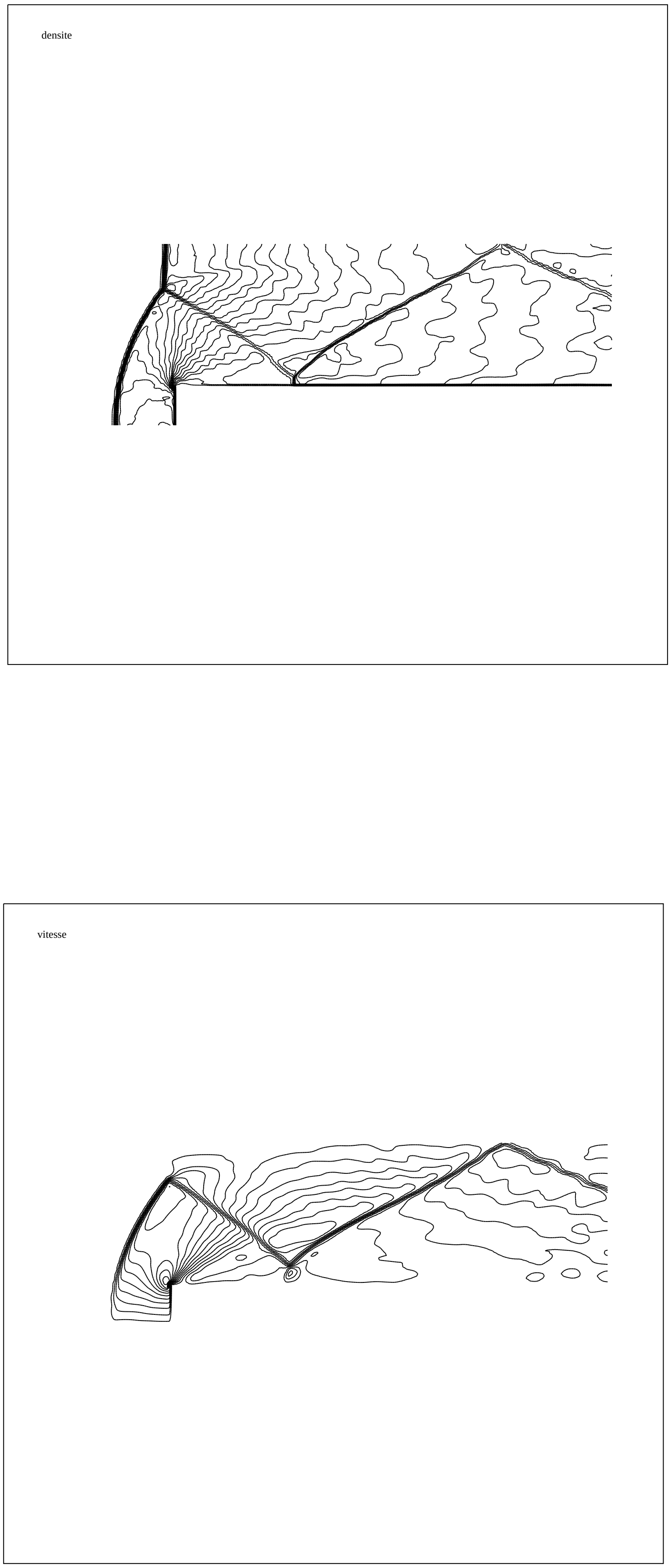
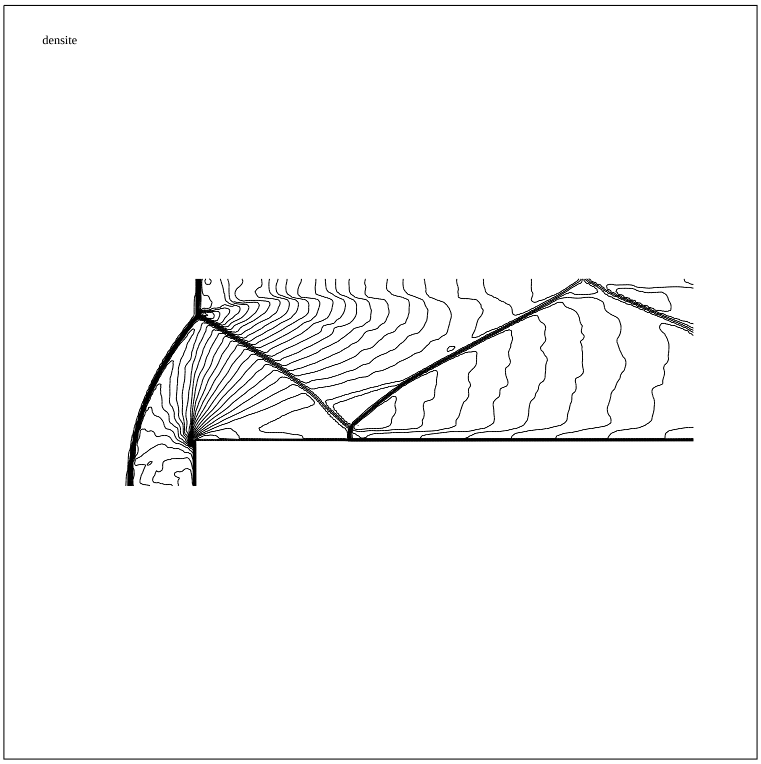


FIG. 4.26 – Résultat des calculs avec des limiteurs de type Lagoutière, CFL=0.25, pour $t = 3.5$



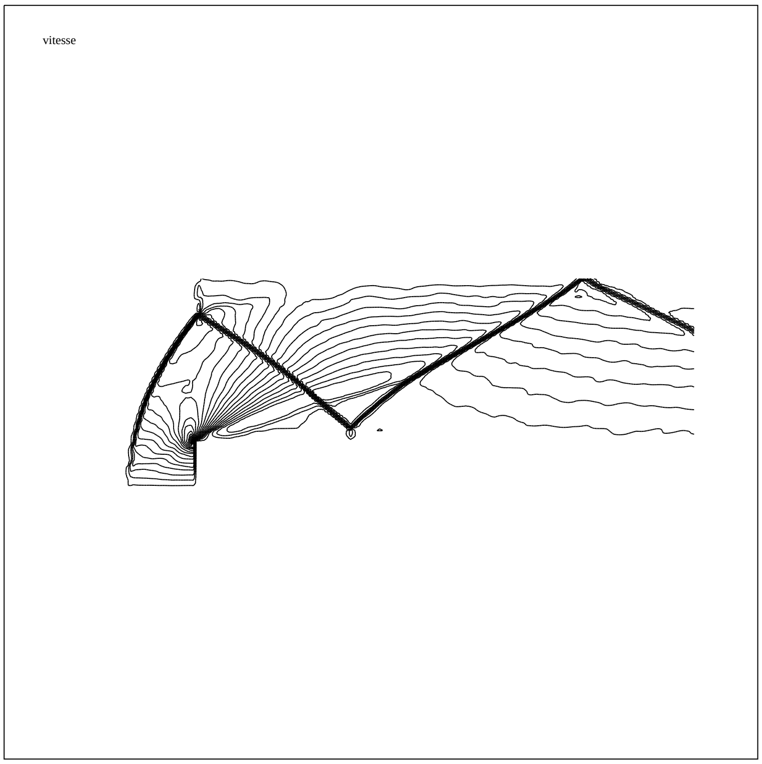


FIG. 4.27 – 5 vitesses: résultats des calculs avec des limiteurs de type Lagoutière, CFL=0.2, pour $t = 3.5$

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Cette étude rentre dans le cadre général des recherches sur les systèmes de lois de conservation. Les travaux ont permis d'établir tous les résultats de stabilité et de convergence pour des systèmes de type BGK discret approchant un loi de conservation scalaire avec bord. Cette étude porte sur divers aspects des modèles cinétiques.

Du point de vue théorique, nous avons montré que pour tout système semi-linéaire de type BGK discret qui approche une loi de conservation scalaire 1D, la solution approchée tendait vers l'unique solution entropique. Ces résultats sont obtenus sans aucune restriction ni sur les données, ni sur le flux du problème scalaire de départ. Le système choisi pour approcher cette loi, n'est pas limité en nombre d'équations. Les résultats sont obtenus par des arguments de compacité standards pour les lois de conservation scalaires. Néanmoins, les termes de bords posent des problèmes de stabilité et de convergence spécifiques au cas d'une approximation hyperbolique sur un domaine avec bord.

Pour la partie numérique des travaux, nous avons redémontré des résultats classiques connus pour le problème de Cauchy sur les schémas avec condition aux limites. Les résultats de stabilité montrent que les schémas tendent tous vers une solution faible non nécessairement entropique. La variation totale en espace représente l'étape la plus complexe du raisonnement. Plusieurs concepts ont été introduits. Le problème avec bord nécessite une régularité de la solution numérique sur le bord. Cette régularité permet, pour les schémas du premier ordre en espace, de tendre vers la solution entropique, lorsque le pas de discrétisation diminue. Nous avons en outre redéfini les limitations nécessaires à la stabilité des schémas de transport du second ordre avec bord.

La dernière partie montre comment implémenter les schémas numériques sur des cas tests, qui permettent de valider les solutions. Dans les deux premiers chapitres nous avons étudié un type particulier de condition aux limites appliquée au systèmes BGK. Ce n'est pas la seule admissible. Sur l'exemple de la relaxation, nous avons exprimé les différentes conditions aux limites possibles. Dans la littérature certaines de ces conditions convergent vers la solution entropique sous de fortes restrictions. Nous avons montré que ces conditions fournissent numériquement des solutions identiques à la condition dite "à l'équilibre" que nous avons utilisé. Les autres cas test implémentés concernent l'approximation cinétique de systèmes de lois de conservation. Les essais ont permis de mettre en évidence le comportement particulier de la solution lorsque les données sont des constantes différentes à l'intérieur et sur le bord. On ne sait pas, en général, construire la solution exacte de ce problème. En suite, la condition de réflexion a été étudiée pour la dynamique des gaz compressibles, en une et deux dimensions d'espace. Nous avons validé deux cas tests difficiles pour la stabilité des schémas les discrétisant : en 1D le test "Blast Waves", et le tunel à MACH 3 en 2D.

Ces travaux ouvrent de nouvelles perspectives sur plusieurs problèmes.

- Le cas scalaire

  L'étude du cas scalaire en plusieurs dimensions d'espace, avec un bord pas forcément régulier semble être l'extension naturelle du travail présenté au cours de la première partie de cette thèse.

  L'approximation de lois de type hyperbolique-parabolique dégénéré par un système relaxé de type BGK discret semble un problème important et difficile. Il s'agit d'étendre les résultats de [41] au cas avec bord. Pour ce type d'équation, les termes de bord qui doivent être contrôlés semblent être beaucoup plus difficiles à maîtriser. Ces travaux seraient aussi bien théoriques que numériques. En effet, [4] le pendant numérique de [41] concerne aussi le problème de Cauchy.

- Le cas des systèmes

  L'étude de l'approximation cinétique d'un problème de Riemann sur le quart d'espace semble nécessaire. Même si l'approximation cinétique ne permet pas forcément de travailler explicitement sur les ondes en présence dans le système étudié.

  Les résultats d'existence et d'unicité pour le p-système convexe avec bord montrés par approximation visqueuse dans [1] ont retenu notre attention.

  Il serait intéressant de redémontrer, dans le cas BGK discret, les résultats obtenus pour le système de la dynamique des gaz isentropique avec bord, dans [9]. Le travail serait double encore une fois puisque l'approximation peut se faire aussi bien par le modèle BGK que par sa discrétisation.

Ce travail a permis de connaître en profondeur divers aspects aussi bien théoriques que numériques de l'approximation cinétique des systèmes hyperboliques. Et comme on le voit dans les perspectives, plusieurs voies s'ouvrent pour la suite des recherches.

Bibliographie

[1] A. Benabdallah Le "p-système" dans un intervalle. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 303(I.4):123-126

[2] Aregba-Driollet, Denise; Natalini, Roberto Convergence of relaxation schemes for conservation laws. *Appl. Anal.* 61(1-2):163–193, 1996

[3] D. Aregba-Driollet and R. Natalini. Discrete kinetic schemes for multidimensional conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(6):1973–2004,2000

[4] D. Aregba-Driollet, R. Natalini, S.Q. Tang Diffusive kinetic explicit schemes for nonlinear degenerate parabolic systems, *Quaderno IAC* 26,2000

[5] C. Bardos, A. Y. le Roux, and J.-C. Nédélec. First order quasi-linear equations with boundary conditions. *Comm. Partial Differential Equations*, 4(9):1017–1034, 1979.

[6] Bouchut, F.; Bourdarias, Ch.; Perthame, B. A MUSCL method satisfying all the numerical entropy inequalities. *Math. Comp.*, 65(216): 1439–1461,1996

[7] F. Bouchut. Construction of BGK models with a family of kinetic entropies for a given system of conservation laws. *J. Statist. Phys.*, 95(1-2):113–170, 1999.

[8] F. Bouchut. Entropy satisfying flux vector splittings and kinetic BGK models Preprint

[9] F. Berthelin and F. Bouchut Weak entropy boundary conditions for isentropic gas dynamics via kinetic relaxation. Preprint

[10] A. Bressan Lecture Notes on Systems of Conservation Laws Cours de doctorat à SISSA, Trieste, (1991)

[11] Y. Brenier Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 21(6): 1013–1037.1984

[12] Y. Brenier Résolution d'équations quasilinéaires en dimension n d'espace à l'aide d'équations linéaires en dimension $n+1$ *Journal of differential equations* 50:375-390, 1983

[13] F. Coron and B. Perthame Numerical passage from kinetic to fluid equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 28(1): 26-42, 1991

[14] C. Cercignani. The Boltzmann equation and its applications *Springer-Verlag* 1988 Book

[15] C. Cercignani, R. Illner and M. Pulvirenti The mathematical theory of dilute gases, *Springer-Verlag* 1994 Book

[16] G.-Q. Chen, C. Levermore, and T.P. Liu. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47:787–830, 1994.

[17] A.Chalabi and D.Seghir Convergence of relaxation schemes for initial boundary value problems for conservation laws Preprint

[18] J.F. Collet and M. Rascle. Convergence of the relaxation approximation to a scalar nonlinear hyperbolic equation arising in chromatography. *Z. Angew. Math. Phys.*, 47:400–409, 1996.

[19] M. Crandall and A. Majda. "Monotone difference approximations for scalar conservation laws", *Math. of Comp* , 34:1–21,1980

[20] F. Dubois and Ph. Le Floch Boundary conditions for non linear hyperbolic systems of conservation laws *Journal of differential equations*, 71:93-122,(1988)

[21] Y. Giga and T. Miyakawa A kinetic construction of global solutions of first order quasilinear equations *Duke Math Journal* 50:505-515, 1983

[22] B. Després and F. Lagoutière Un schéma non linéaire anti-dissipatif pour l'équation d'advection linéaire *Notes au C.R.A.S* , 328:939-944,1999

[23] B.Hanouzet and R.Natalini. Weakly coupled systems of quasilinear hyperbolic equations, *Differential Integral Equations* ,9:1279-1292 1994

[24] A. Harten On a class of high resolution total-variation-stable finite difference schemes, *SIAM J.Num.Anal.*, 21:1-23, 1984.

[25] F. James. Convergence results for some conservation laws with a reflux boundary condition and a relaxation term arising in chemical engineering. *SIAM J. Math. Anal.*, 1998. in press.

[26] F. James, Y.-J. Peng and B. Perthame Kinetic formulation of the chromatography and some other hyperbolic systems *J. Math. Pures Appl* 74:367-385, 1995

[27] S. Jin and Z. Xin. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48:235–277, 1995.

[28] S.N. Kružkov. First order quasilinear equations in several independent variables. *Mat. USSR Sb.*, 81:225–255, 1970.

[29] A. Kurganov and E. Tadmor New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *J. Comput. Phys.* 160.1: 241–282,2000.

[30] P.D. Lax Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves *SIAM, Philadelphia* 1973

[31] A.Y. Le Roux. Vanishing viscosity method for a quasilinear first order equations with boundary condition. Conference on the numerical analysis of singular perturbation problems Nijnegen 1978.

[32] P. Lions, B. Perthame and E. Tadmor. A kinetic formulation of isentropic gaz dynamics and p-system *Comm. Math. Phys.*163:415-431, 1994

[33] X.D. Liu and P.D. Lax Positive schemes for solving multi-dimensional hyperbolic systems of conservation laws. *Proceedings of the VIII International Conference on Waves and Stability in Continuous Media* , Part I (Palermo, 1995). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. part I No. 45:367–375,1996

[34] H. Liu and W.A. Yong. Admissible boundary conditions and stability of boundary-layers for a hyperbolic relaxation system. Preprint 1999.

[35] P. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.* 13:217–237, 1960

[36] S. Alinhac and G. Metivier Propagation de l'analycité des solutions de systèms hyperboliques non-linaires *Invent. math.* 75: 189-204, 1984

[37] R. Natalini. Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49(8):795–823, 1996.

[38] R. Natalini. A discrete kinetic approximation of entropy solutions to multidimensional scalar conservation laws. *J. Differential Equations*, 148(2):292–317, 1998.

[39] R. Natalini and A. Terracina. Convergence of a relaxation approximation to a boundary value problem for conservation laws *Comm. Partial Differential Equations* 26 (7-8): 1235–1252. 2001

[40] H. Nessyahu and E. Tadmor Nonoscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws *J. Comput. Phys.* 87(2):408–463, 1990

[41] F. Bouchut, F.R. Guarguaglini and R. Natalini, Diffusive BGK Approximations for Nonlinear Multidimensional Parabolic Equations, *Indiana Univ. Math. J.* 49:723-749, 2000

[42] S. Nishibata. The initial-boundary value problems for hyperbolic conservation laws with relaxation. *J. Differential Equations*, 130(1):100–126, 1996.

[43] A. Nouri, A. Omrane, and J. P. Vila. Boundary conditions for scalar conservation laws from a kinetic point of view. *J. Statist. Phys.*, 94(5-6):779–804, 1999.

[44] B. Perthame Second-order Boltzmann schemes for compressible Euler equations in one and two space dimensions. SIAM J. Numer. Anal. 29.1:1–19,1992

[45] B. Perthame and E. Tadmor. A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, 136:501–517, 1991.

[46] D. Serre. Systèmes de lois de conservation I et II Diderot Editeur, Paris, 1996.

[47] P. Woodward and P. Colella The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comput. Phys.* 54 (1):115–173,1984

[48] W.C. Wang and Z. Xin. Asymptotic limit of initial-boundary value problems for conservation laws with relaxational extensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 51(5):505–535, 1998.

[49] J. Wang and G. Warnecke Convergence of relaxing schemes for conservation laws. Advances in nonlinear partial differential equations and related areas *World Sci. Publishing, River Edge, NJ,* 300–325, 1998.

[50] J. Whitham. *Linear and nonlinear waves.* Wiley, New York, 1974.

[51] W.A. Yong. Boundary conditions for hyperbolic systems with stiff source terms. Technical report, IWR, University of Heidelberg, 1997.

[52] Ziemer. Weak differentiable function Book