

Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 60- Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Commentaires du jury 2015 : Les candidats doivent bien prendre conscience que le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Par exemple, des développements comme le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford n'ont rien à faire ici. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur.

Commentaires du jury 2016 : Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction de endomorphismes normaux peut être évoquée.

Bibliographie

- [F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, <https://www.math.u-bordeaux.fr/~mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf>
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2'] Compléments et errata, <https://www.math.u-bordeaux.fr/~mmatigno/Errata-FM2.pdf>
[Fr. B-C-D] Fresnel J. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
et
[Bo.] Boyer P. *Algèbre et Géométrie* (Calvage Mounet 2016)
[C. G.] Caldero P., Germoni J. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (Calvage Mounet 2016)

Développements conseillés :

- (1) Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux, [Fr. B-C-D] p. 89.
Corollaire. Deux matrices de $O_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.
Application : Si G est un sous-groupe de $O(E)$ d'exposant m (i.e. $\forall g \in O(E), g^m = Id$) alors G est fini, [Fr. B-C-D] p. 182 et exercice ci-dessous.
- (2) Décomposition de Cartan + $O_n(\mathbb{R})$ resp. $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$ resp. $SL_n(\mathbb{R})$, [Fr. B-C-D] p. 142 et 145 et exercice ci-dessous.
- (3) Exponentielle des matrices antisymétriques réelles, [Fr. B-C-D] p. 284 question 3 et exercice ci-dessous.

Exercice 1

- (1) Rappeler le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n .
Preuve. Dans une base orthonormale convenable la matrice d'un endomorphisme orthogonal O est un tableau diagonal de p , $+1$, de q , -1 et de tableaux diagonaux de matrices de rotations du plan euclidien $R(\theta_i)$ avec $0 < \theta_i < \pi$. De plus le uplet $(p, q, \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_t)$ ne dépend pas de la base et $\chi_O(X) = (X - 1)^p (X + 1)^q \prod_{1 \leq i \leq t} (X^2 - 2\cos\theta_i X - 1)$. ///
- (2) Soit $O \in O_3(\mathbb{R})$. On suppose que son polynôme caractéristique est $\chi_O(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 induit par O .
Preuve. Puisque la dimension est impaire, nécessairement 1 ou -1 est racine de $\chi_O(X)$. On a $\chi_O(X) = (X + 1)(X^2 + X + 1)$. Ainsi dans une base orthonormale convenable la matrice de O est un tableau diagonal $-1, R(2\pi/3)$; c'est une symétrie rotation produit commutatif d'une rotation d'axe $\mathbb{R}e_1$ et d'angle $2\pi/3$ et d'une réflexion orthogonale d'hyperplan $(\mathbb{R}e_1)^\perp$. ///

Exercice 2 La décomposition polaire et la décomposition de Cartan dans $M_n(\mathbb{R})$, [Fr. B-C-D] exercice 10.25 partie 5) p.148 Voir [Fr. B-C-D] p.142 pour une preuve de la décomposition de Cartan dans $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et comme corollaire la décomposition polaire dans [Fr. B-C-D] exercice 10.25 partie 1) à 4).

Rappeler le théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien et sa conséquence sur la réduction des matrices symétriques réelles.

Preuve. Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E , alors il existe une base ortho-normale de E de vecteurs propres pour u . Autrement dit $E = \bigoplus^\perp (\text{Ker}(u - \lambda Id))$ où λ parcourt le spectre de u . Si $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, l'endomorphisme $X \rightarrow SX$ où X est un vecteur colonne de \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique est un endomorphisme autoadjoint (on a $(SX|Y) = (X|SY)$); ainsi il existe une matrice de changement de base $O \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale avec $S = ODO^{-1} = OD {}^tO$ (en particulier S et D sont simultanément semblables et congruentes). Cela montre qu'une matrice symétrique réelle est positive (resp. définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives). ///

(1) Décomposition polaire.

Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive i.e. ${}^tX S X \geq 0, \forall {}^tX \in \mathbb{R}^n$.

(a) Montrer qu'il existe $S_1 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive avec $S_1^2 = S$.

Preuve. Par le théorème de réduction des matrices symétriques réelles on a $S = ODO^{-1}$ où D est diagonale de diagonale (d_1, \dots, d_n) et d_i parcourt les valeurs propres. Si X_i est un vecteur colonne propre non nul avec $SX_i = d_i X_i$ alors $(SX_i|X_i) = d_i(X_i|X_i) \geq 0$ puisque S est positive et donc $d_i \geq 0$. Soit D_1 la matrice diagonale réelle de diagonale $(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$ et $S_1 := OD_1O^{-1}$. On a $S_1^2 = OD_1^2O^{-1} = S$. Puisque $O^{-1} = {}^tO$, il suit que S_1 est congruente à D_1 qui est symétrique positive; il en est donc de même de S_1 . ///

(b) On suppose désormais que $S_1 \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive telle que $S_1^2 = S$. Soit Λ (resp. Λ_1) le spectre de S (resp. S_1). Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est dans Λ_1 si et seulement si $\lambda \geq 0$ et $\lambda^2 \in \Lambda$.

Preuve. On a $\chi_S(X^2) = \det(X^2 Id - S) = \chi_{S_1}(X) \chi_{S_1}(-X)$. Et d'autre part $\chi_S(X^2) = \prod_i (X^2 - d_i)$. Puisque S_1 est symétrique positive les racines de $\chi_{S_1}(X)$ sont les racines positives de $\prod_i (X^2 - d_i)$. ///

(c) Montrer que si $\lambda \in \Lambda_1$ alors $\text{Ker}(S_1 - \lambda Id) \subset \text{Ker}(S - \lambda^2 Id)$ et en déduire l'égalité $\text{Ker}(S_1 - \lambda Id) = \text{Ker}(S - \lambda^2 Id)$.

Preuve. Si $S_1(X) = \lambda X$, on a $S(X) = S_1^2(X) = \lambda^2 X$ d'où l'inclusion. Pour l'égalité on a vu (théorème de réduction des matrices symétriques réelles) que $n = \sum_{\lambda \in \Lambda_1} \dim \text{Ker}(S_1 - \lambda Id)$ et $n = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim \text{Ker}(S - \lambda Id)$. Enfin puisque par la question précédente $\Lambda = \{\lambda^2 \mid \lambda \in \Lambda_1\}$ il suit que $\dim \text{Ker}(S_1 - \lambda Id) = \dim \text{Ker}(S - \lambda^2 Id)$, d'où l'égalité. ///

(d) Montrer l'unicité de $S' \in M_n(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive telle que $S'^2 = S$.

Preuve. Les mêmes raisonnements qui précèdent montrent que si $S' \in M_n(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive telle que $S'^2 = S$ alors $\text{Ker}(S' - \lambda Id) = \text{Ker}(S - \lambda^2 Id)$ et le spectre de S' est l'ensemble des racines carrées positives des éléments du spectre de S . Ainsi S' est l'homothétie de rapport $\sqrt{d_i}$ sur le sous espace propre $\text{Ker}(S - d_i Id)$ de S . L'unicité suit alors de l'égalité $\mathbb{R}^n = \bigoplus_i \text{Ker}(S - d_i Id)$. ///

(e) Une digression. Soit S_0 une matrice symétrique réelle. En s'inspirant de ce qui précède résoudre l'équation $S_1^3 = S_0$ avec S_1 une matrice symétrique réelle.

Preuve. On remarque que la condition de positivité a disparu cependant la même méthode fonctionne puisque l'application $x \rightarrow x^3$ définit une bijection de \mathbb{R} . L'équation $S_1^3 = S_0$ avec S_1 symétrique réelle admet pour unique solution la matrice de l'endomorphisme dont la restriction sur le sous espace propre $\text{Ker}(S_0 - d_i Id)$ de S_0 est l'homothétie de rapport $d_i^{1/3}$, l'unique racine réelle de $x^3 - d_i = 0$ et ceci pour d_i parcourant le spectre de S_0 .

Remarque. Si $m \in 2\mathbb{N}^*$ et $S \in \text{Sym}^+(\mathbb{R}^n)$ on note s_1, \dots, s_t les valeurs propres distinctes (elles sont ≥ 0) de S et μ_1, \dots, μ_t leurs multiplicités respectives et E_{S, s_i} le sous-espace propre correspondant, alors $\dim E_{S, s_i} = \mu_i$ et $E := \mathbb{R}^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq t} E_{S, s_i}$. Soit B_i une base orthonormale de E_{S, s_i} et $B := \cup B_i$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ la matrice de changement de base avec $PS^tP = D$ et D est la matrice diagonale qui induit l'homothétie de rapport s_i sur B_i . Soit $D^{1/m}$ la matrice diagonale qui induit l'homothétie de rapport $s_i^{1/m}$ sur B_i . Soit $\Sigma \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $P\Sigma^tP = D^{1/m}$, elle est congruente à une matrice de $\text{Sym}^+(\mathbb{R}^n)$; ainsi $\Sigma \in \text{Sym}^+(\mathbb{R}^n)$ et par construction $\Sigma^m = S$. Pour l'unicité : soit $\Sigma \in \text{Sym}^+(\mathbb{R}^n)$ avec $\Sigma^m = S$. On note $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ les valeurs propres distinctes (elles sont ≥ 0) de Σ et ν_1, \dots, ν_r leurs multiplicités respectives et E_{Σ, σ_i} le sous-espace propre correspondant alors S induit l'homothétie de rapport σ_i^m sur E_{Σ, σ_i} . Puisque les σ_i^m pour $1 \leq i \leq r$ sont deux à deux distincts et que $E := \mathbb{R}^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} E_{\Sigma, \sigma_i}$ il suit que $r = t$ et quitte à ranger les σ_i , E_{Σ, σ_i} est le sous-espace propre $E_{S, s_i = \sigma_i^m}$; ainsi Σ induit l'homothétie de rapport $s_i^{1/m}$ sur E_{S, s_i} et donc Σ est uniquement ainsi définie. ///

- (f) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ déduire des questions précédentes qu'il existe un unique couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique définie positive tel que $M = OS$.

Preuve. Montrons d'abord l'unicité. On a ${}^tMM = S^tOOS = S^2$. Puisque tMM est symétrique et que $({}^tMMX|X) = (MX|MX) > 0$ pour X un vecteur colonne non nul de \mathbb{R}^n , il suit que S est l'unique matrice symétrique réelle positive (de fait définie positive) telle que $S^2 = {}^tMM$. On a alors $O = MS^{-1}$. D'où l'unicité. Ce qui précède donne la clé pour l'existence. Soit S symétrique définie positive avec $S^2 = {}^tMM$ et $O := MS^{-1}$, on a ${}^tOO = S^{-1}{}^tMMS^{-1} = Id$.

- (g) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ déduire de la question précédente qu'il existe un couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique positive tel que $M = OS$.

Preuve. On considère la suite $M_k := M - \frac{1}{k}Id$. Pour $k \gg 0$, $1/k$ évite les valeurs propres de M , ainsi $M_k \in GL_n(\mathbb{R})$ et donc $M_k = O_k S_k$ avec $O_k \in O_n(\mathbb{R})$ et S_k symétrique définie positive. Puisque $O_n(\mathbb{R})$ est compact on peut extraire une suite $O_{\varphi(k)}$ convergente vers $O \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $S_{\varphi(k)}$ converge vers S une matrice réelle symétrique et pour X vecteur colonne de \mathbb{R}^n on a $(S_{\varphi(k)}X|X) \geq 0$ et donc à la limite $(SX|X) \geq 0$. ///

(2) Décomposition de Cartan.

- (a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ déduire de la question précédente qu'il existe $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs avec $M = O_1 D O_2$.

Preuve. On écrit $M = OS$ et on diagonalise S dans une base orthonormée ainsi $S = O_2^{-1} D O_2$ alors $O_1 := O O_2^{-1}$ convient puisque D est positive. ///

- (b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M - O$ est inversible.

Preuve. On écrit $M = O_1 D O_2$ avec $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs. Ainsi cela revient à trouver $O \in O_n(\mathbb{R})$ avec $D - O_1^{-1} O O_2^{-1}$ inversible. Il suffit de considérer une matrice diagonale D' avec des 1 ou des -1 sur la diagonale de façon que $D - D'$ soit inversible ($D' = -Id$ convient puisque D est positive). Puisque $D' \in O_n(\mathbb{R})$ alors $O := O_1 D' O_2$ convient. ///

Exercice 3 Application de la décomposition polaire : Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Voir aussi [F. M. 2] Théorème 4 p. 42.

Preuve. On rappelle que la décomposition polaire induit un homéomorphisme de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $O_n(\mathbb{R}) \times \text{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour conclure on rappelle que l'exponentielle définit un homéomorphisme de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ dans $\text{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$. On conclut puisque $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

On peut aussi conclure en utilisant la décomposition de Cholesky qui induit un homéomorphisme de $\text{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \times (\mathbb{R}^{++})^n$ et on conclut avec l'exponentielle de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^{++} .

L'homéomorphisme mérite une explication : On considère l'application $\varphi : L_n(\mathbb{R}) \times D_n(\mathbb{R}^{++}) \rightarrow Sym_n^{++}(\mathbb{R})$ où $L_n(\mathbb{R})$ est le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ des triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale et $D_n(\mathbb{R}^{++})$ le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales avec coefficients strictement positifs sur la diagonale définie par $\varphi(L, D) = LD {}^tL \in Sym_n^{++}(\mathbb{R})$. Cette application est continue (les coefficients sont des polynômes en les entrées). L'unicité se montre comme dans "LU" et il est peut-être moins évident que l'application réciproque est continue. On peut remarquer que L s'obtient à partir de $S \in Sym_n^{++}(\mathbb{R})$ en appliquant successivement le pivot de Gauss et que les pivots diagonaux fonctionnent systématiquement puisque le polynôme $\Delta := \prod_{1 \leq k \leq n} det((X_{i,j})_k) \in Z[X_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n]$ où $(X_{i,j})_k$ est de taille $k \times k$ est le produit des déterminants principaux génériques ne s'annule pas en $S \in Sym_n^{++}(\mathbb{R})$ (les matrices principales sont encore symétriques définies positives) ainsi les coefficients de L sont les évaluations en S de fractions rationnelles $\in Z[X_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n][\frac{1}{\Delta}]$; elles sont continues. ///

Exercice 4 Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$, [Fr. B-C-D] p. 145. Soit G un groupe compact avec $O_n(\mathbb{R}) \subset G \subset GL_n(\mathbb{R})$. On suppose que $M \in G - O_n(\mathbb{R})$.

(1) Rappeler la décomposition de Cartan dans $M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Preuve. On suppose que $M \in M_{n,m}(\mathbb{R}) - \{0\}$. Il existe $O_1 \in O_n(\mathbb{R})$, $O_2 \in O_m(\mathbb{R})$ et des réels (uniques) $0 < d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_r$ où r est le rang de M tels que $M = O_1 D O_2$ où $D = \sum_{1 \leq i \leq r} d_i E_{i,i}$. ///

(2) Montrer en utilisant la décomposition de Cartan qu'il existe une matrice diagonale $D \in G - O_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Par la décomposition de Cartan on a $M = O_1 D O_2$ où $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R}) \subset G$ et D une matrice diagonale à termes positifs. Ainsi $D = O_1^{-1} M O_2^{-1} \in G - O_n(\mathbb{R})$. ///

(3) En considérant les suites D^k , $k \in \mathbb{N}^*$ et D^{-k} , $k \in \mathbb{N}^*$, trouvez une contradiction.

Preuve. Ainsi les suites D^k , $k \in \mathbb{N}^*$ et D^{-k} , $k \in \mathbb{N}^*$ sont à valeurs dans G et sont donc bornée par la compacité de G . Ainsi si (d_1, \dots, d_n) sont les éléments sur la diagonale de D on a $0 < d_i \leq 1$ et $0 < d_i^{-1} \leq 1$ et donc $d_i = 1$, i.e. $D = Id$ ce qui est une contradiction. ///

Exercice 5 Un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, [Fr. B-C-D] p. 166.

Soit Φ une forme bilinéaire symétrique d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension n . On note $O(\Phi) := \{u \in GL(E) \mid \forall (x, y) \in E \times E, \Phi(u(x), u(y)) = \Phi(x, y)\}$, le groupe orthogonal pour Φ . Soient $u \in GL(E)$ et Φ' la forme bilinéaire symétrique $\Phi \circ u$ (i.e. $\Phi'(x, y) := \Phi(u(x), u(y))$).

(1) Montrer que $O(\Phi') = u^{-1} O(\Phi) u$.

Preuve. On a $O(\Phi') := \{v \in GL(E) \mid \Phi' \circ v = \Phi'\} = \{v \in GL(E) \mid \Phi \circ u \circ v = \Phi \circ u\} = \{v \in GL(E) \mid \Phi \circ u \circ v \circ u^{-1} = \Phi\} = \{v \in GL(E) \mid u \circ v \circ u^{-1} \in O(\Phi)\} = u^{-1} O(\Phi) u$. ///

(2) Soient Ψ et Ψ' deux formes bilinéaires symétriques sur E de même signature. Montrer qu'il existe $u \in GL(E)$ avec $\Psi' = \Psi \circ u$.

Preuve. Ainsi si (p, q) est la signature de Ψ , il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)$ orthogonale pour Ψ avec $\Psi(e_i) = 1$ pour $i \in I$, $\Psi(e_i) = -1$ pour $i \in J$, $\Psi(e_i) = 0$, pour $i \notin I \cup J$ où $I = p$ et $J = q$ et puisque Ψ' a la même signature il existe donc de même une base $\mathcal{B}' = (e'_i)$ orthogonale pour Ψ' avec $\Psi'(e'_i) = 1$ pour $i \in I$, $\Psi'(e'_i) = -1$ pour $i \in J$, $\Psi'(e'_i) = 0$, pour $i \notin I \cup J$. Soit $u \in GL(E)$ avec $u(e_i) = e'_i$ pour tout i . Par construction les deux formes bilinéaires Ψ' et $\Psi \circ u$ coïncident sur la base e_i ; ainsi $\Psi' = \Psi \circ u$. ///

(3) Soit Φ une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E et $G \subset GL(E)$ un sous-groupe fini. Soit $\Phi'(x, y) := \sum_{g \in G} \Phi(g(x), g(y))$ pour $x, y \in E$.

(a) Montrer que Φ' est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E et que $G \subset O(\Phi')$.
Preuve. Puisque $\Phi'(x, x) = \sum_{g \in G} \Phi(g(x), g(x)) \geq 0$ et que $\Phi'(x, x) = 0$ implique $\Phi(x, x) = 0$ il suit que Φ' est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E . De plus si $g' \in G$ alors $\Phi'(g'(x), g'(y)) = \sum_{g \in G} \Phi(g(g'(x)), g(g'(y)))$ et puisque $g \in G \rightarrow gg' \in G$ est une bijection il suit que $\Phi' \circ g' = \Phi'$ et donc $g' \in O(\Phi')$. ///

(b) En déduire que $G \subset u^{-1}O(\Phi)u$ où $u \in GL(E)$.

Preuve. C'est alors une conséquence de (1). ///

(4) Soit $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe fini. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $G \subset P^{-1}O_n(\mathbb{R})P$.

Preuve. Soit Φ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n i.e. la base canonique \mathcal{B} est une BON pour Φ , alors $O_n(\mathbb{R})$ est le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ des $Mat(v \in O(\Phi), \mathcal{B})$ et avec les notations précédentes $\hat{G} \subset u^{-1}O(\Phi)u$ où \hat{g} est l'endomorphisme induit par $g \in G$ et $u \in GL(E)$ et donc si $P := Mat(u, \mathcal{B})$ alors $G \subset P^{-1}O_n(\mathbb{R})P$. ///

(5) Soit $G \subset SO_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe d'ordre n . Montrer que $G = \langle R(\frac{2\pi}{n}) \rangle$ où

$$R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit $g \in G$ alors $g = R(\theta)$ et $g^n = R(n\theta) = Id$. Il suit que $R(\theta) \in \langle R(\frac{2\pi}{n}) \rangle$. Ainsi $G \subset \langle R(\frac{2\pi}{n}) \rangle$ et avec les cardinaux on a égalité. ///

(6) Soit $G \subset SL_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe d'ordre n .

(a) Montrer que G est cyclique.

Preuve. En effet puisque $SL_2(\mathbb{Z}) \subset SL_2(\mathbb{R}) \subset GL_2(\mathbb{R})$, il suit de (4) qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ avec $G \subset P^{-1}O_2(\mathbb{R})P$ et puisque $\det g = 1$ si $g \in G$ on a que $G \subset P^{-1}SO_2(\mathbb{R})P$; ainsi $G = \langle P^{-1}R(\frac{2\pi}{n})P \rangle$ est cyclique d'ordre n . ///

(b) Montrer que $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Preuve. On traduit le fait que $P^{-1}R(\frac{2\pi}{n})P \in SL_2(\mathbb{Z})$. En particulier $\chi_{R(\frac{2\pi}{n})} = X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ et donc $2\cos\frac{2\pi}{n} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ et donc $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. ///

(c) Exhiber un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ d'ordre 4 (resp. 6).

Preuve. Il suffit de considérer le groupe engendré par la matrice compagne $C(n)$ de la matrice compagnon du polynôme $\chi_{R(\frac{2\pi}{n})}$ pour $n \in \{4, 6\}$ i.e. $X^2 + 1$ resp. $X^2 - X + 1$. Alors $C(4)^2 = -Id$ et donc l'ordre de $C(4)$ est 4 et $C(6)^3 = -Id$ et donc l'ordre de $C(6)$ est 6. ///

(d) Exhiber une infinité de sous-groupes de $SL_2(\mathbb{Z})$ d'ordre 6.

Preuve. Soit $P_m := \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors $P_m^{-1}C(6)P_m = \begin{bmatrix} -m & -1 - m(m+1) \\ 1 & m+1 \end{bmatrix}$ et parmi les groupes $\langle \begin{bmatrix} -m & -1 - m(m+1) \\ 1 & m+1 \end{bmatrix} \rangle$ il y en a une infinité puisque l'ensemble des matrices $\begin{bmatrix} -m & -1 - m(m+1) \\ 1 & m+1 \end{bmatrix}$ est infini. ///

Exercice 6 Un sous-groupe d'exposant fini de $O_n(\mathbb{R})$ est fini, [Fr. B-C-D] p. 182.

On munit \mathbb{R}^n de la structure euclidienne canonique. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et on munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme fonctionnelle $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Soit G un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ et $N \geq 1$ un entier. On suppose que $U^N = Id$ pour tout $U \in G$.

(1) Rappeler le théorème de réduction des éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ avec POP^{-1} qui est un tableau diagonal de 1 et de -1 et de matrices de rotations planes de mesure d'angle θ_i avec $0 < \theta_i < \pi$. ///

(2) En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes (par arcs).

Preuve. Puisque l'application $\det : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pm 1$ est continue et surjective il suit que $O_n(\mathbb{R})$ a au moins deux composantes connexes. Montrons que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Soit $O \in SO_n(\mathbb{R})$, puisque $\det O = 1$ il suit qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ avec POP^{-1} un tableau diagonal de 1 et de matrices de rotations planes de mesure d'angle θ_i avec $0 < \theta_i \leq \pi$. Il suffit de considérer alors le même tableau en modifiant les θ_i en $t\theta_i$ avec $0 \leq t \leq 1$ pour obtenir un chemin continu dans $O_n(\mathbb{R})$ de Id à O . Il suit que $SO_n(\mathbb{R})$ et $D(-1)SO_n(\mathbb{R})$ sont les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$.///

(3) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Preuve. Puisque $M \in M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M^t M \in M_n(\mathbb{R})$ est continue (les coeff de $M^t M$ sont polynomiaux en ceux de M), il suit que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$. Puisque les colonnes de $O \in O_n(\mathbb{R})$ sont de norme 1 il suit que les coefficients sont en valeur absolue bornés par 1. Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace vectoriel normé complet $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, il est donc compact.///

(4) Montrer que $\|OA\| = \|A\|$ si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $O \in O_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Immédiat puisque O est une isométrie (et donc bijective).///

(5) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $U \in G - Id$, on a $\|U - Id\| \geq \epsilon$. En déduire que pour tout $U, U' \in G$ avec $U \neq U'$ on a $\|U - U'\| \geq \epsilon$.

Preuve. Il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ avec OUO^{-1} qui est un tableau diagonal de 1 et de -1 et de matrices de rotations planes d'angle θ_i avec $0 < \theta_i < \pi$. De plus puisque $U^N = Id$ il suit que pour $U \neq Id$ on a même $\frac{2\pi}{N} < \theta_i$. Ainsi puisque $U \in G - Id$, il existe un vecteur colonne X avec $\|X\| = 1$ et $OUO^{-1}X = -2X$ ou $(OUO^{-1} - Id)X = (0, \dots, 0, -1 + \cos\theta_i, -\sin\theta_i, 0, \dots, 0)$. Dans le premier cas on a $\|U - Id\| = \|O(U - Id)O^{-1}\| \geq 2$ et dans le second cas $\|U - Id\| = \|O(U - Id)O^{-1}\| \geq [(-1 + \cos\theta_i)^2 + (\sin\theta_i)^2]^{1/2} = (2 + 2\cos\theta_i)^{1/2} \geq (2 - 2\cos\frac{2\pi}{N})^{1/2} =: \epsilon$. On conclut en notant que pour tout $U, U' \in G$ avec $U \neq U'$ on a $\|U - U'\| = \|UU'^{-1} - Id\|$ et $UU'^{-1} \in G - Id$.///

(6) Conclure que G est fini.

Preuve. On recouvre $O_n(\mathbb{R})$ par les boules ouvertes $B(O, \frac{1}{4}\epsilon)$. Par ce qui précède chaque boule contient au plus un élément de G . On conclut avec la compacité de $O_n(\mathbb{R})$.///

Exercice 7 Soit $d \geq 1$, montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ possède un unique sous-groupe d'ordre d . En est-il de même pour $SL_2(\mathbb{R})$?

Exercice 8 Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple, [C. G.] Tome 1 p. 239 et Fresnel Espaces quadratiques p. 98.

Exercice 9 Une application de la décomposition de Cartan ou de la décomposition polaire : Points extrémaux de la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$, [F. M. 2] p. 118 et [Bo.] p. 93. On pourra voir aussi l'application aux matrices bi stochastiques, [Bo.] p. 94.

Soit $B := \{U \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|U\|_2 \leq 1\}$, alors B est l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité B .

Preuve. Soit $U \in B$. On peut écrire $U = O_1 D O_2$ avec $O_i \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale avec $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Alors $\|D\|_2 = \|U\|_2$ et $\|D\|_2 = \max_i d_i = d_n$. Si $D = \sum_j \lambda_j O_j$ avec $O_j \in O_n(\mathbb{R})$ et $\sum_j \lambda_j = 1$ et $0 \leq \lambda_j \leq 1$, on a $U = \sum_j \lambda_j O_1 O_j O_2$; ainsi il suffit de montrer que D est dans l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$. Pour cela on écrit $d_1 = \alpha_1(-1) + (1 - \alpha_1)(1)$ alors $D = \alpha_1 D_{-1} + (1 - \alpha_1) D_1$ où D_{-1} resp. D_1 est la matrice diagonale D dans la quelle on a substitué -1 (resp. 1) à d_1 . En itérant le procédé on montre avec l'associativité du barycentre que D est dans l'enveloppe convexe des matrices diagonales avec des $-1, 1$ sur la diagonale.

Montrons maintenant que $O \in O_n(\mathbb{R})$ est un point extrémal de B . Si $O = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}U_2$ avec $U_i \in B$, quitte à multiplier par O^{-1} on peut supposer que $O = Id$. Alors si $x \in \mathbb{R}^n$ et $\|x\|_2 = 1$ on a $x = \frac{1}{2}U_1(x) + \frac{1}{2}U_2(x)$

et $1 = \|x\|_2 \leq \frac{1}{2}\|U_1(x)\|_2 + \frac{1}{2}\|U_2(x)\|_2 \leq 1$, ainsi on a un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire ce qui donne $U_i(x)$ colinéaires à x et de même sens et l'inégalité précédente implique alors que $U_i(x) = x$, ainsi $U_i = Id$.

Maintenant si $U \in B - O_n(\mathbb{R})$ alors toujours avec Cartan on peut supposer $U = D$ est diagonale avec $0 \leq d_i \leq 1$ et $d_{i_0} < 1$. On peut écrire $d_{i_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2d_{i_0} - 1)$. Alors $2D = D_1 + D_2$ avec D_i des matrices diagonales qui coïncident avec D en dehors de la ligne i_0 et valent respectivement 1 et $2d_{i_0} - 1$ pour le terme diagonal à la ligne i_0 . Par construction $D_i \in B$ et $D_1 \neq D$.

On retrouve là un cas particulier du théorème de Krein-Milman à savoir que tout convexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. ///

Exercice 10 Inégalités de Weyl, [F. M. 2] p. 113, [C. G.] tome 1 p. 199.

Notations. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien de dimension n . Si w est un endomorphisme symétrique (on dit aussi auto-adjoint) de E , on note $\chi_w \in \mathbb{R}[X]$ son polynôme caractéristique. Alors $\chi_w(X) = \prod_{1 \leq i \leq n} (X - \lambda_{w,i})$ avec $\lambda_{w,i} \in \mathbb{R}$ rangés ainsi : $\lambda_{w,1} \geq \lambda_{w,2} \geq \dots \geq \lambda_{w,n}$. De plus $(e_{w,i}, 1 \leq i \leq n)$ désigne une BON de E avec $w(e_{w,i}) = \lambda_{w,i}e_{w,i}$.

(1) Soit $x \in E$ avec $(x|x) = 1$. Montrer que $\lambda_{w,n} \leq (x|w(x)) \leq \lambda_{w,1}$.

Preuve. On écrit x dans la BON $(e_{w,i})_{1 \leq i \leq n}$, $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_{w,i}$. Alors $(x|w(x)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{w,i} x_i^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{w,1} x_i^2 = \lambda_{w,1}$ et $(x|w(x)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{w,i} x_i^2 \geq \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{w,n} x_i^2 = \lambda_{w,n}$. ///

(2) Soit F_1, F_2, F_3 des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $\dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 > 2n$. Montrer que $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \{0\}$.

Preuve. Soit $f : F_1 \times F_2 \times F_3 \rightarrow E \times E$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2)$. C'est une application linéaire et son noyau $\text{Ker } f = \{(x, x, x) \mid x \in F_1 \cap F_2 \cap F_3\}$. Par le théorème du rang, $\dim F_1 \times F_2 \times F_3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$. Ainsi $\dim \text{Ker } f = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 - \dim \text{Im } f \geq \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 - 2 \dim E > 0$. ///

(3) Soient u, v deux endomorphismes symétriques.

(a) Montrer que $u + v$ est un endomorphisme symétrique.

Preuve. Par l'unicité de l'adjoint on a que $(u + v)^* = u^* + v^*$. ///

(b) On considère pour $1 \leq i, j \leq n$ avec $i + j - 1 \leq n$, les espaces vectoriels $E_u := \bigoplus_{i \leq k \leq n} \mathbb{R}e_{u,k}$, $E_v := \bigoplus_{j \leq k \leq n} \mathbb{R}e_{v,k}$ et $E_{u+v} := \bigoplus_{1 \leq k \leq i+j-1} \mathbb{R}e_{u+v,k}$. Montrer que $E_u \cap E_v \cap E_{u+v} \neq \{0\}$.

Preuve. On a $\dim E_u + \dim E_v + \dim E_{u+v} = n - i + 1 + n - j + 1 + i + j - 1 = 2n + 1 > 2n$. D'où le résultat avec la question précédente. ///

(c) Soit $x \in E_u \cap E_v \cap E_{u+v}$ avec $(x|x) = 1$. En appliquant la question 1 aux restrictions de u, v puis $u + v$ à des espaces adaptés, montrer que $\lambda_{u+v, i+j-1} \leq \lambda_{u,i} + \lambda_{v,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ avec $i + j - 1 \leq n$.

Preuve. On applique (1) à x et à la restriction de u à E_u qui est encore un endomorphisme symétrique et les racines de son polynôme caractéristique sont $\lambda_{u,i} \geq \lambda_{u,i+1} \geq \dots \geq \lambda_{u,n}$, ainsi (1) $\lambda_{u,n} \leq (x|u(x)) \leq \lambda_{u,i}$. De même on obtient (2) $\lambda_{v,n} \leq (x|v(x)) \leq \lambda_{v,j}$ et enfin (3) $\lambda_{u+v, i+j-1} \leq (x|(u+v)(x)) \leq \lambda_{u+v,1}$. Ainsi (3) donne avec (1) et (2) $\lambda_{u+v, i+j-1} \leq (x|(u+v)(x)) = (x|u(x)) + (x|v(x)) \leq \lambda_{u,i} + \lambda_{v,j}$. ///

(4) Donner en le justifiant un énoncé type *Inégalités de Hermann Weyl* pour des matrices.

Preuve. On se donne $S, S' \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques, alors \hat{S} définit un endomorphisme de l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni de sa structure d'espace euclidien canonique et $(x|\hat{S}(y)) = (\hat{S}(x)|y)$, ainsi \hat{S} est un endomorphisme symétrique et les inégalités de Weyl traduisent alors des inégalités entre les racines des polynômes caractéristiques de S, S' et $S + S'$. ///

Exercice 11 Exponentielle des matrices antisymétriques réelles, [Fr. B-C-D] p. 284 question 3.

(1) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et B une base orthonormée. Soit u un endomorphisme de E . On suppose que u est antisymétrique i.e. $u^* = -u$.

(a) Caractériser la matrice de u dans la base orthonormée B .

Preuve. Dans une BON la matrice de l'adjoint d'un endomorphisme v est la transposée de la matrice de v dans cette base; ainsi la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de u dans la BON B vérifie ${}^tA = -A$.///

(b) On suppose que $n = 2$ et que $\text{Ker } u = \{0\}$. Montrer que u est produit d'une homothétie de rapport $\rho > 0$ et d'une rotation de mesure d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$.

Preuve. Dans la base orthonormée B si la matrice de u est A alors la matrice de u^* est tA . Ainsi $A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} = |a| \begin{bmatrix} 0 & -\text{sign}(a) \\ \text{sign}(a) & 0 \end{bmatrix}$ d'où le résultat.///

(c) On suppose $n > 0$. Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par u .

(i) Montrer que $u|_F$ est un endomorphisme antisymétrique.

Preuve. Puisque $u^* = -u$, il suit que $u^*(F) \subset F$; ainsi pour tout $x, y \in F$ on a $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$ et donc $u|_F = -u|_F$ est l'adjoint de $u|_F$.///

(ii) Montrer que $u(F^\perp) \subset F^\perp$ et que $u|_{F^\perp}$ est un endomorphisme antisymétrique.

Preuve. Soit $x \in F^\perp$ si $y \in F$ on a $(u(x)|y) = (x|u^*(y)) = -(x|u(y)) = 0$ ainsi $u(F^\perp) \subset F^\perp$.///

(d) Montrer que si F est une droite stable par u alors $u|_F = 0$.

Preuve. Si $F = \mathbb{R}x$ avec $\|x\| = 1$ alors $u(x) = -u(x)$ et donc $u|_F = 0$.///

(e) On suppose que $\text{Ker } u = \{0\}$. Montrer que u admet un plan stable.

Preuve. Un lemme classique qui vaut pour tout les endomorphismes réels montre que u laisse stable un sous-espace de dimension 1 ou 2. Rappelons la preuve : On considère la décomposition en irréductibles du polynôme minimal $m_u(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Si il y a un facteur irréductible de degré 1 disons $X - \lambda$ alors λ est une valeur propre de u d'où l'existence d'une direction propre. Si ce n'est pas le cas on considère un facteur irréductible de degré 2 disons $P(X) = X^2 - aX - b$. Alors $Q := \frac{m_u}{P}$ n'est pas identiquement nul sur E . Soit $x \in E$ avec $y := Q(u)(x) \neq 0$, alors $F := \mathbb{R}y + \mathbb{R}u(y)$ est un sous-espace stable par u et non réduit à $\{0\}$ et de dimension ≤ 2 . Dans le cas où u est antisymétrique et $\text{Ker } u = \{0\}$, on a vu que u n'a pas de droite stable et ainsi u admet un plan stable.///

(f) Montrer que $E = \bigoplus_{0 \leq i \leq s} E_i$ où $E_0 = \text{Ker } u$ et pour $1 \leq i \leq s$, E_i est un plan stable par u .

Preuve. Quitte à considérer la restriction de u à E_0^\perp on peut supposer que $E_0 = \{0\}$ (remarquer que $u|_{E_0^\perp}$ est antisymétrique par 1. c)). Soit alors F un plan stable par u alors $u|_F$ et $u|_{F^\perp}$ sont antisymétriques. Un raisonnement par récurrence sur la dimension de l'espace donne le résultat.///

(g) Ecrire la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme caractéristique de u .

Preuve. Par f) et a) il suit que $\chi_u(X) = X^{n_0} \prod_{1 \leq i \leq s} (X^2 + \rho_i^2)$ où $n_0 = \dim E_0$ et $\rho_i > 0$ sont les rapports des similitudes directes $u|_{E_i}$.///

(2) Soit $\text{Asym}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

(a) Montrer que si $A \in \text{Asym}_n(\mathbb{R})$ alors $\exp(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Soit $O := \exp(A)$ l'application transposée étant continue sur $M_n(\mathbb{R})$ il suit que ${}^tO = \exp({}^tA) = \exp(-A)$ et donc $O^tO = \exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = \text{Id}$. Ainsi $\exp(A) \in \text{O}_n(\mathbb{R})$. D'autre part si $M \in M_n(\mathbb{C})$ alors $\det \exp(M) = \exp(\text{Tr } M)$ (trigonaliser M dans $M_n(\mathbb{C})$). Puisque $\text{Tr } A = 0$ par 1.g) il suit que $\exp(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$. ///

(b) Montrer que $\exp(\text{Asym}_n(\mathbb{R})) = \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Soit donc $O \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ avec PO^tP un tableau diagonal de matrices de rotations planes complété par l'identité. Puisque si $A \in \text{Asym}_n(\mathbb{R})$, $PA^tP \in \text{Asym}_n(\mathbb{R})$, il suit qu'il suffit de montrer le résultat en dimension $n = 2$. Soit $O := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$. Soit

$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, alors $J^2 = -Id$ et donc $\exp(\theta J) = \cos(\theta)Id + \sin(\theta)J = O$. ///

(c) Déterminer les $A \in \text{Asym}_n(\mathbb{R})$ avec $\exp(A) = Id$.

Preuve. Quitte à remplacer A par PA^tP où $P \in O_n(\mathbb{R})$ on peut supposer que A est un tableau diagonal de similitudes planes θJ avec $\theta \in \mathbb{R}$ suivi de la matrice nulle (c'est 1.f) et g)). Puisque $\exp(\theta J) = Id$ ssi $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ le résultat suit. ///