

Schémas cinétiques et splitting d'ondes pour les équations de Saint-Venant en régime bas Froude

Mathieu Rigal

Superviseuses : Nina Aguillon, Nathalie Ayi

GDT ANGE

30 juin 2020



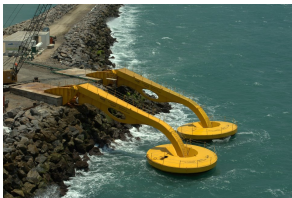
- 1 Motivation
- 2 Représentations cinétiques
- 3 Schéma cinétique avec splitting BGK
- 4 Approche macroscopique avec splitting d'ondes
- 5 Interprétation cinétique du splitting d'ondes
- 6 Conclusion et perspectives

Écoulements géophysiques

Motivation

L'eau recouvre 71% de la surface terrestre, il est important de comprendre les écoulements géophysiques pour :

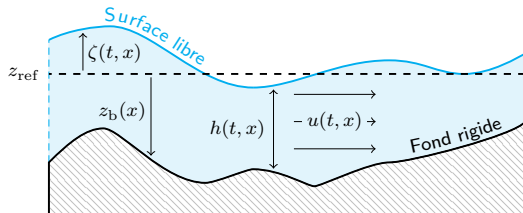
- Prédiction de l'évolution de la qualité de l'eau (polluants, salinité...);
- Production d'énergie (marée motrice, refroidissement des centrales nucléaires, barrages hydroélectriques...);
- Evaluation des risques et conséquences de catastrophes naturelles (inondations, tsunamis, rupture de barrage...);
- Anticipation de l'évolution du littoral et de l'écosystème marin en réponse au réchauffement climatique;



Plusieurs types de modèles peuvent être considérés à différentes échelles :

- **Modèle particulaire (échelle microscopique)** : chaque particule est considérée individuellement (position + vitesse), et il faut résoudre toutes les collisions (très coûteux) ;
- **Modèle cinétique (échelle mésoscopique)** : hypothèse de continuité (nombre ∞ de particules), fonction de distribution des particules se déplaçant à une vitesse donnée + opérateur de collision ;
- **Modèle macroscopique** : hypothèses de continuité et de libre parcours moyen nul (équilibre hydrodynamique toujours atteint), EDPs sur les quantités d'intérêt observables ;

Dans la suite, on s'intéresse plus particulièrement au cas des écoulements côtiers \Rightarrow modèles particuliers inadaptés pour dériver des méthodes numériques.



- surface libre ζ ;
- fond rigide z_b ;
- hauteur d'eau $h = \zeta - z_b$;
- vitesse horizontale u ;
- débit $q = hu$;

Système de Saint-Venant :
$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z_b \end{cases} \quad (\text{SV})$$

- Décrit un écoulement fluide incompressible sans phénomène de dispersion ;
- Dérivé à partir des éq. d'Euler à surface libre par moyennation verticale (voir par ex. **D. LANNES**. *From the swell to the beach : modelling shallow water waves.*) ;
- Hypothèses requises :
 - $H/L \ll 1$;
 - la vitesse horizontale du fluide est bien approchée par sa moyenne verticale ;
 - $\partial_z p = -\rho g$ (approximation hydrostatique) ;

Le système (SV) peut être mis sous la forme $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U})$ avec la variable $\mathbf{U} = (h, q)^T$, le flux $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (q, q^2/h + gh^2/2)^T$ et le terme source $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = (0, -gh\partial_x z_b)^T$.

Valeurs propres du système : $\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh}$ (stricte hyperbolicité si $h > 0$).

L'unicité de la solution est obtenue en imposant l'inégalité d'entropie non conservative

$$\partial_t[\eta(\mathbf{U}) + ghz_b] + \partial_x[G(\mathbf{U}) + gqz_b] \leq 0 \quad (1)$$

avec $\eta(\mathbf{U}) = (q^2/h + gh^2)/2$ et $G(\mathbf{U}) = (q^3/h^2 + 2ghq)/2$.

Nombre de Froude : $\mathfrak{Fr} = |u|/\sqrt{gh}$

Rapport entre la vitesse des ondes matérielles et celle des ondes de gravité.

Pour un écoulement côtier, $\mathfrak{Fr} \ll 1$. Typiquement, u est petit et h est grand \Rightarrow écoulement proche d'un **état d'équilibre** (lac au repos).

On s'intéresse donc à des schémas conservatifs, positifs, préservant les états d'équilibre, si possible admettant un équivalent discret de (1), et efficaces même lorsque \mathfrak{Fr} devient petit.

Stratégie : exploiter une représentation cinétique pour dériver un schéma macroscopique.

Représentations cinétiques

Fonction de distribution et équilibre hydrodynamique

On considère $\mathbf{f} : (t, x, \xi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la densité des « particules » qui, au temps t et au point x , se déplacent à la vitesse $v(\xi)$. Ici, $\xi \in (\Xi, d\xi)$ est appelé *paramètre cinétique*. On peut alors définir $\mathbf{U}_f(t, x) := \int_{\Xi} \mathbf{f}(t, x, \xi) d\xi$.

Si la bathymétrie est plate, \mathbf{f} vérifie :

$$\partial_t \mathbf{f} + v(\xi) \partial_x \mathbf{f} = \frac{\mathbf{Q}[\mathbf{f}](t, x, \xi)}{\varepsilon} \quad (2)$$

- \mathbf{Q} est un opérateur de collision modélisant les transferts de particules (changement de vitesse résultant d'une collision).
- ε représente le *libre parcours moyen* entre deux collisions. Plus ε est petit, et plus un nombre important de collisions a lieu sur un intervalle de temps donné. La densité \mathbf{f} tend alors formellement vers un *équilibre hydrodynamique* \mathbf{M} :

$$\mathbf{U}_f \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{U}_{\text{eq}}, \quad \mathbf{f}(t, x, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{M}(\mathbf{U}_{\text{eq}}(t, x), \xi) \quad (3)$$

L'opérateur de collision est choisi de sorte à vérifier $\mathbf{Q}[\mathbf{f}] = 0 \iff \mathbf{f} = \mathbf{M}(\mathbf{U}_{\text{eq}}, \xi)$.

A la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, l'éq. (2) devient :

$$\partial_t \mathbf{M}(\mathbf{U}, \xi) + v(\xi) \partial_x \mathbf{M}(\mathbf{U}, \xi) = \tilde{\mathbf{Q}}(t, x, \xi) \quad (4)$$

On relie cet équilibre au système (SV) en imposant les *relations de moment* :

$$\int_{\Xi} \mathbf{M}(\mathbf{U}, \xi) d\xi = \mathbf{U}, \quad \int_{\Xi} v(\xi) \mathbf{M}(\mathbf{U}, \xi) d\xi = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \quad (\text{RM})$$

Si l'on pose $P_{\text{topo}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a le résultat suivant :

Lemme (Représentation cinétique des éq. de St-Venant)

Soit \mathbf{M} vérifiant (RM). Alors \mathbf{U} est solution faible de (SV) ssi $\mathbf{M}(\mathbf{U}, \xi)$ vérifie l'équation cinétique $\partial_t \mathbf{M} + v(\xi) \partial_x \mathbf{M} + g(\partial_x z_b) P_{\text{topo}} \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{Q}}(t, x, \xi)$ avec $\int_{\Xi} \tilde{\mathbf{Q}}(t, x, \xi) d\xi = 0$ pour presque tout t, x .

Comment choisir la Maxwellienne ?

Soient $\mathcal{U}, \mathcal{D}_\xi \subset \mathbb{R}^2$ deux convexes tels que $\forall t, x, \xi \mathbf{U}(t, x) \in \mathcal{U}$ et $\mathbf{M}(\mathcal{U}, \xi) \subset \mathcal{D}_\xi$.

Définition (Entropie cinétique)

$H : \mathcal{D}_\xi \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ est une entropie cinétique associée à \mathbf{M} si $H(\cdot, \xi)$ est convexe sur \mathcal{D}_ξ et :

$$\int_{\Xi} H(\mathbf{M}(\mathbf{U}, \xi), \xi) d\xi = \eta(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{U} \quad (\text{E1}), \quad \int_{\Xi} H(\mathbf{M}(\mathbf{U}_f, \xi), \xi) d\xi \leq \int_{\Xi} H(\mathbf{f}, \xi) d\xi \quad \forall \mathbf{f} \quad (\text{E2})$$

→ (E1), (E2) et la convexité de $H(\cdot, \xi)$ permettent de retrouver l'inégalité d'entropie.

Deux possibilités pour choisir \mathbf{M} :

- Connaissant H , on détermine \mathbf{M} en minimisant la fonctionnelle $\mathbf{f} \mapsto \int_{\Xi} H(\mathbf{f}, \xi) d\xi$ sous les contraintes (RM). L'égalité (E1) peut être vue comme une définition de η .
- Connaissant η , on choisit \mathbf{M} telle que pour presque tout $\xi \in \Xi$, $\mathbf{M}(\cdot, \xi) \in \mathcal{M}^\eta := \{\mathbf{M} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2, (\mathbf{M}')^T \eta'' \text{ est semi-définie positive sur } \mathcal{U}\}$. Ceci garantit l'existence d'une entropie cinétique.

Pour plus de détails, se référer à :

François Bouchut. "Construction of BGK Models with a Family of Kinetic Entropies for a Given System of Conservation Laws." (1999)

Choix des paramètres cinétiques :

- $\Xi = \mathbb{R}$ avec $d\xi$ la mesure de Lebesgue.
- $v(\xi) = \xi$, $\mathbf{M}(\mathbf{U}, \xi) = \frac{1}{g\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \sqrt{(2gh - (\xi - u)^2)_+}$.

Remarque : le choix de la Maxwellienne minimise l'énergie $\mathbf{f} \mapsto \int_{\Xi} \left(\frac{\xi^2}{2} f_0 + \frac{\pi^2 g^2}{6} f_0^3 + gz_b f_0 \right) d\xi$ avec $\mathbf{f} = (1, \xi)^T f_0$ sous les contraintes (RM).

Benoît PERTHAME et Chiara SIMEONI. "A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term." (2001)

Plutôt que de dériver un schéma macroscopique directement basé sur l'équation cinétique, on fait une approximation de type BGK : $\partial_t \mathbf{f} + v(\xi) \partial_x \mathbf{f} = (\mathbf{M}(\mathbf{U}_f, \xi) - \mathbf{f}) / \varepsilon$.

Il s'agit de l'équation (2) avec $\mathbf{Q}[\mathbf{f}] = \mathbf{M}(\mathbf{U}_f, \xi) - \mathbf{f}$ (opérateur BGK).

Discrétisation :

- Discrétisation uniforme du domaine $[x_{\min}, x_{\max}]$ par N cellules $(C_i)_{1 \leq i \leq N}$ centrées en $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$. L'interface entre les cellules $i, i + 1$ est notée $x_{i+1/2}$.
- \mathbf{U}_i^n approximation de la moyenne de \mathbf{U} sur C_i au temps t^n , $\mathbf{M}_i^n(\xi) := \mathbf{M}(\mathbf{U}_i^n, \xi)$.

$$\text{Mise à jour basée sur le splitting BGK : } \begin{cases} \partial_t \mathbf{f} = (\mathbf{M}(\mathbf{U}_t, \xi) - \mathbf{f})/\varepsilon & (5a) \\ \partial_t \mathbf{f} + v(\xi) \partial_x \mathbf{f} = 0 & (5b) \end{cases}$$

Etape 1 : relaxation

Partant de $\mathbf{U}(t^n, \cdot)$, toutes les collisions sont effectuées de manière instantanée ($\varepsilon \rightarrow 0$ dans (5a)) et l'état d'équilibre est immédiatement atteint : $\mathbf{f}(t^n, x, \xi) = \mathbf{M}(\mathbf{U}(t^n, x), \xi)$.

Etape 2 : convection

On détermine $\mathbf{f}(t^{n+1-}, x, \xi)$ la solution au temps Δt^n de (5b) couplé à la donnée initiale $\mathbf{M}(\mathbf{U}(t^n, x), \xi)$.

La 2^{ème} étape est approchée à l'aide d'un **schéma volumes finis décentré amont** :

$$\mathbf{f}_i^{n+1-}(\xi) = \mathbf{M}_i^n(\xi) - \frac{\Delta t^n}{\Delta X} [\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^n - \tilde{\mathbf{F}}_{i-1/2}^n], \quad \tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2}^n = \begin{cases} v(\xi) \mathbf{M}_{i+1}^n(\xi) & \text{si } v(\xi) < 0 \\ v(\xi) \mathbf{M}_i^n(\xi) & \text{si } v(\xi) > 0 \end{cases}$$

La mise à jour est obtenue au niveau macroscopique grâce aux relations de moment :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} := \int_{\Xi} \mathbf{f}_i^{n+1-}(\xi) d\xi = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta X} [\mathbf{F}_{\text{cinétique}}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}_{\text{cinétique}}(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n)]$$

$$\text{avec } \mathbf{F}_{\text{cinétique}}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) = \int_{v(\xi) < 0} v(\xi) \mathbf{M}(\mathbf{U}_{i+1}^n, \xi) d\xi + \int_{v(\xi) > 0} v(\xi) \mathbf{M}(\mathbf{U}_i^n, \xi) d\xi.$$

Gestion de la topographie : reconstruction hydrostatique au niveau macroscopique.

- Reconstruction $\mathbf{U}_{i+1/2\pm}^n$ de la solution au voisinage gauche/droit de l'interface $i + 1/2$.
- Permet un décentrement du terme source \mathbf{S}_i^n .
- Préservation des états d'équilibre.

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\mathbf{F}_{\text{cinétique}}(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathbf{F}_{\text{cinétique}}(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n)] + \Delta t^n \tilde{\mathbf{S}}_i^n$$

Emmanuel Audusse et al. "Kinetic entropy inequality and hydrostatic reconstruction scheme for the saint-venant system." (2016)

Avantages de l'approche cinétique :

- Outil puissant pour dériver des schémas numériques.
- Positivité, préservation des états d'équilibre, entropie cinétique.

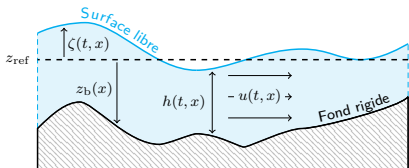
Inconvénient : condition CFL trop restrictive lorsque $\tilde{\gamma}r \ll 1$:

$$\Delta t^n \leq \min_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{\Delta x}{|u_i^n| + w \sqrt{gh_i^n}} \right) = \min_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{\Delta x}{|u_i^n|(1 + w/\tilde{\gamma}r)} \right) \ll \min_{1 \leq i \leq N} \frac{\Delta x}{|u_i^n|}$$

w dépend du support de \mathbf{M} (dans notre cas $w = \sqrt{2}$).

Splitting des ondes

Coordonnées (ζ, q)



Objectif : On cherche à avoir des pas de temps plus grands. Pour y parvenir, on aimerait implémenter le traitement des ondes de gravité.

→ nécessite un splitting d'ondes.

Réécriture des équations de Saint-Venant en coordonnées (ζ, q) :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + \partial_x (q^2 / (\zeta - z) + g\zeta^2 / 2 - g\zeta z) = -g\zeta \partial_x z_b \end{cases} \quad (\text{SV-}\zeta)$$

On peut mettre (SV- ζ) sous la forme $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}) + \partial_x \mathbf{F}_{\text{L}}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_{\text{L}}(\mathbf{U})$ avec $\mathbf{U} = (\zeta, q)^T$, $\mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}) = (0, q^2 / (\zeta - z) + g\zeta^2 / 2)^T$, $\mathbf{F}_{\text{L}}(\mathbf{U}) = (q, -g\zeta z)^T$ et $\mathbf{S}_{\text{L}}(\mathbf{U}) = (0, -g\zeta \partial_x z_b)^T$.

Remarque : $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}_{\text{L}}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_{\text{L}}(\mathbf{U})$ correspond à la linéarisation des éq. de Saint-Venant autour d'un lac au repos.

On note ensuite que les Jacobiennes $\mathbf{F}'_{\text{NL}}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g\zeta - u^2 & 2u \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}'_{\text{L}}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gz & 0 \end{pmatrix}$

admettent respectivement pour valeurs propres $\lambda_{\text{NL}}^{\pm}(\mathbf{U}) \in \{0, 2u\}$ et $\lambda_{\text{L}}^{\pm}(\mathbf{U}) \in \{\pm \sqrt{-gz}\}$.

⇒ \mathbf{F}_{NL} décrit un phénomène de convection, \mathbf{F}_{L} décrit la propagation des ondes de gravité.

On s'appuie donc sur le splitting d'ondes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}_{\text{L}}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_{\text{L}}(\mathbf{U}) \end{array} \right. \quad (6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}_{\text{L}}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_{\text{L}}(\mathbf{U}) \end{array} \right. \quad (6b)$$

Intégration en temps : Euler explicite pour (6a), implicite pour (6b). Impliciter le terme source est important car il s'agit d'un terme raide. De plus, ceci permet au schéma de préserver les états d'équilibre avec un traitement centré de $\mathbf{S}_{\text{L}}(\mathbf{U})$.

$$\mathbf{U}_i^{n+1/2} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta X} [\tilde{\mathbf{F}}_{\text{NL}}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{NL}}(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n)]$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t^n}{\Delta X} [\tilde{\mathbf{F}}_{\text{L}}(\mathbf{U}_i^{n+1}, \mathbf{U}_{i+1}^{n+1}) - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{L}}(\mathbf{U}_{i-1}^{n+1}, \mathbf{U}_i^{n+1})] + \frac{\Delta t^n}{\Delta X} \mathbf{S}_{\text{L},i}^{n+1}$$

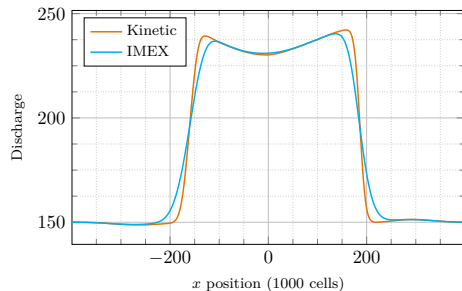
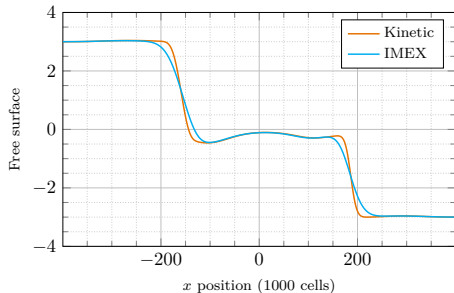
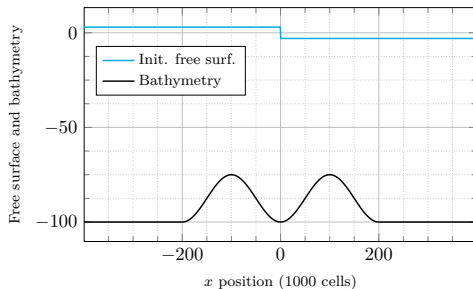
avec $\mathbf{S}_{\text{L},i}^{n+1} = (0, -g\zeta_i^{n+1} \Delta z_{b,i})^T$ et $\Delta z_{b,i} = (z_{b,i+1} - z_{b,i-1})/2$. Pour le flux numérique, on choisit par exemple le flux de Rusanov :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\text{L/NL}}(\mathbf{U}_{\text{G}}, \mathbf{U}_{\text{D}}) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{\text{L/NL}}(\mathbf{U}_{\text{G}}) + \mathbf{F}_{\text{L/NL}}(\mathbf{U}_{\text{D}}) - a_{\text{L/NL}}(\mathbf{U}_{\text{D}} - \mathbf{U}_{\text{G}})], \quad a_{\text{L/NL}} = \max_{1 \leq i \leq N} |(\lambda_{\text{L/NL}}^\pm)_i^n|$$

Georgij BISPEN et al. "IMEX Large Time Step Finite Volume Methods for Low Froude Number Shallow Water Flows." (2014)

Splitting des ondes

Résultats numériques



Interprétation cinétique du schéma précédent ?

Une approximation cinétique BGK pour chacune des deux parties du splitting d'ondes :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{f}_{\text{NL}} + v_{\text{NL}}(\xi) \partial_x \mathbf{f}_{\text{NL}} = [\mathbf{M}_{\text{NL}}(\mathbf{U}_{\text{f}_{\text{NL}}}, \xi) - \mathbf{f}_{\text{NL}}] / \varepsilon & (7a) \\ \partial_t \mathbf{f}_{\text{L}} + v_{\text{L}}(\xi) \partial_x \mathbf{f}_{\text{L}} + g(\partial_x z_b) P_{\text{topo}} \mathbf{f}_{\text{L}} = [\mathbf{M}_{\text{L}}(\mathbf{U}_{\text{f}_{\text{L}}}, \xi) - \mathbf{f}_{\text{L}}] / \varepsilon & (7b) \end{cases}$$

Choix des paramètres cinétiques :

- Modèles à **deux vitesses** : $\Xi = \{-1, 1\}$, $d\xi$ mesure de probabilité uniforme sur Ξ .
- Vitesses cinétiques : $v_{\text{NL}}(\xi) = \xi c_{\text{NL}}$, $v_{\text{L}}(\xi) = \xi c_{\text{L}}$.
- Maxwellienne choisie comme **combinaison linéaire de \mathbf{U} et $\mathbf{F}_{\text{L/NL}}(\mathbf{U})$** :

$$\mathbf{M}_{\text{L/NL}}(\mathbf{U}, \xi) = \alpha_{\text{L/NL}}(\xi) \mathbf{U} + \beta_{\text{L/NL}}(\xi) \mathbf{F}_{\text{L/NL}}(\mathbf{U}) \quad (8)$$

Les **relations de moment** imposent : $\alpha_{\text{L/NL}}(\xi) = 1$ et $\beta_{\text{L/NL}}(\xi) = 1/v_{\text{L/NL}}(\xi)$.

L'existence d'une entropie cinétique est conditionnée par $\sigma(\mathbf{M}'_{\text{L/NL}}(\mathbf{U}, \xi)) \subset \mathbb{R}_+$
 $\Rightarrow \sigma(\mathbf{F}'_{\text{L/NL}}(\mathbf{U})) \subset [-c_{\text{L/NL}}, c_{\text{L/NL}}]$.

Schéma en trois étapes :

- 1 Relaxation $\partial_t \mathbf{f}_{\text{NL}} = [\mathbf{M}_{\text{NL}}(\mathbf{U}_{\text{NL}}, \xi) - \mathbf{f}_{\text{NL}}]/\varepsilon$ vers l'équilibre hydrodynamique ne tenant compte que du phénomène de convection.
- 2 Evolution de la distribution des quantités d'intérêt liée au transport cinétique :
 $\partial_t \mathbf{f}_{\text{NL}} + v_{\text{NL}}(\xi) \partial_x \mathbf{f}_{\text{NL}} = 0$.
- 3 Relaxation et transport cinétique **simultanés** pour la partie linéaire du splitting des ondes (7b).

Les deux premières étapes sont traitées explicitement et correspondent au schéma avec splitting BGK pour la partie non linéaire du splitting des ondes :

$$\mathbf{U}_i^{n+1/2} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta X} [\mathbf{F}_{\text{NL}, \text{cinétique}}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}_{\text{NL}, \text{cinétique}}(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n)]$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathbf{F}_{\text{NL}, \text{cinétique}}(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D) &= \int_{v(\xi) < 0} v_{\text{NL}}(\xi) \mathbf{M}_{\text{NL}}(\mathbf{U}_D, \xi) d\xi + \int_{v(\xi) > 0} v_{\text{NL}}(\xi) \mathbf{M}_{\text{NL}}(\mathbf{U}_G, \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} [-c_{\text{NL}} \mathbf{U}_D + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}_D)] + \frac{1}{2} [c_{\text{NL}} \mathbf{U}_G + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}_G)] \end{aligned}$$

On reconnaît le flux de Rusanov pour $c_{\text{NL}} = \max_{1 \leq i \leq N} |(\lambda_{\text{NL}}^\pm)_i^n|$.

Traitement de la partie implicite : sans splitting BGK.

$$\frac{f_{L,i}^{n+1} - f_{L,i}^n}{\Delta t^n} + v_L(\xi) \frac{f_{L,i+1/2}^{n+1} - f_{L,i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + g \frac{\Delta z_i}{\Delta x} P_{\text{topo}} f_{L,i}^{n+1} = \frac{M_L(\mathbf{U}_{\varepsilon,i}^{n+1}, \xi) - f_{L,i}^{n+1}}{\varepsilon} \quad (9)$$

où $\mathbf{U}_{\varepsilon,i}^{n+1} = \int_{\Xi} f_{L,i}^{n+1}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} [f_{L,i}^{n+1}(-1) + f_{L,i}^{n+1}(1)]$ et $f_{L,i+1/2}^{n+1} = \begin{cases} f_{L,i}^{n+1} & \text{si } v_L(\xi) > 0 \\ f_{L,i+1}^{n+1} & \text{sinon} \end{cases}$

On souhaite passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. On réécrit pour cela le schéma (9) sous la forme d'un système $4N \times 4N$:

$$A^n \mathbf{V}_{\varepsilon}^{n+1} = \mathbf{B}^n + \frac{1}{2\varepsilon} R \mathbf{V}_{\varepsilon}^{n+1} \quad (10)$$

avec le vecteur d'inconnues $\mathbf{V}_{\varepsilon}^{n+1}$ défini par blocs de taille 4 :

$$(\mathbf{V}_{\varepsilon,i}^{n+1})_{4i-3 \leq j \leq 4i} = (f_{L,\zeta,i}^{n+1}(1), f_{L,\zeta,i}^{n+1}(-1), f_{L,q,i}^{n+1}(1), f_{L,q,i}^{n+1}(-1)) \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

La matrice $R = \text{diag}(R_1, \dots, R_N)$ avec :

$$R_i = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1/c_L & 1/c_L \\ 1 & -1 & -1/c_L & -1/c_L \\ -gz_{b,i}/c_L & -gz_{b,i}/c_L & -1 & 1 \\ gz_{b,i}/c_L & gz_{b,i}/c_L & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Equivalent discret de $f_L(t, x, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M_L(\mathbf{U}_{\text{eq}}(t, x), \xi)$: si la limite $\mathbf{V}_{\varepsilon}^{n+1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\mathbf{V}}^{n+1}$ existe, il faut que $\bar{\mathbf{V}}^{n+1} \in \ker R$.

Les matrices R_i sont semblables à $\text{diag}(-2, -2, 0, 0) \Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}^{4N \times 4N}, R = PDP^{-1}$.

Le schéma (9) est donc équivalent à : $\tilde{A}^n W_\varepsilon^{n+1} = \tilde{B}^n + \frac{1}{2\varepsilon} D W_\varepsilon^{n+1}$ (11)

avec $W_\varepsilon^{n+1} = P^{-1} V_\varepsilon^{n+1}$, $\tilde{A}^n = P^{-1} A^n P$, et $\tilde{B}^n = P^{-1} B^n$.

En introduisant $\mathcal{I} = \{j \in \llbracket 1, 4N \rrbracket, D_{jj} \neq 0\}$ et $\mathcal{J} = \llbracket 1, 4N \rrbracket \setminus \mathcal{I}$, l'équation (11) se décompose à la limite comme :

$$\begin{cases} \tilde{A}_{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}^n \overline{W}_{\mathcal{J}}^{n+1} = \tilde{B}_{\mathcal{J}}^n \\ \overline{W}_{\mathcal{I}}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Algorithme 1 : Schéma cinétique implicite pour les ondes de gravité

- 1 Assembler $\tilde{A}_{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}^n$ et $\tilde{B}_{\mathcal{J}}^n$;
 - 2 Déterminer \overline{W}^{n+1} solution de (12) ;
 - 3 Calculer $\overline{V}_\varepsilon^{n+1} = P \overline{W}_{\mathcal{J}}^{n+1}$;
 - 4 Appliquer les relations de moment à $\overline{V}_\varepsilon^{n+1}$ pour obtenir la solution macroscopique ;
-

On peut finalement montrer le résultat suivant :

Proposition

Supposons $\tilde{A}_{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}^n$ inversible. Alors $\mathbf{W}_\varepsilon^{n+1}$ solution de (11) converge et sa limite vérifie (12). De plus, le schéma décrit par l'algorithme 1 est équivalent au niveau macroscopique au schéma :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\tilde{\mathbf{F}}_L(\mathbf{U}_i^{n+1}, \mathbf{U}_{i+1}^{n+1}) - \tilde{\mathbf{F}}_L(\mathbf{U}_{i-1}^{n+1}, \mathbf{U}_i^{n+1})] + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \mathbf{S}_{L,i}^{n+1}$$

avec $\tilde{\mathbf{F}}_L$ le flux de Rusanov associé à \mathbf{F}_L .

Points problématiques :

- Positivité ?
- Décentrement local plutôt que global ?
- Conditions aux bords ?

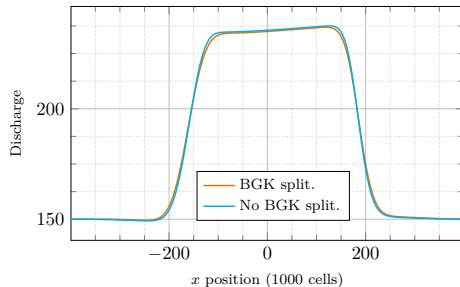
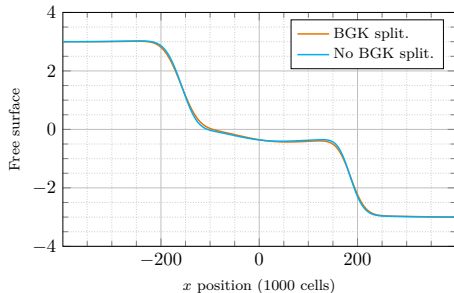
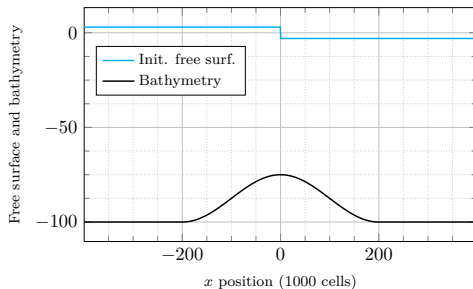
Alternative : traiter la partie implicite par un splitting BGK.

$$\mathbf{f}_{L,i}^{n+1-} = \mathbf{M}_L(\mathbf{U}_i^{n+1/2}, \xi) - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} v_L(\xi) [\mathbf{f}_{L,i+1/2}^{n+1-} - \mathbf{f}_{L,i-1/2}^{n+1-}] - g \Delta t^n \frac{\Delta z_{b,i}}{\Delta x} P_{\text{topo}} \mathbf{f}_{L,i}^{n+1-}$$

→ on perd l'équivalence avec le flux de Rusanov au niveau macroscopique.

Splitting des ondes

Alternative avec splitting BGK



Pour résumer :

- Approche cinétique intéressante pour dériver des schémas.
- Les schémas explicites induisent un pas de temps trop restreint lorsque $\mathfrak{F}r \ll 1$.
Solution : splitting d'ondes.
- Nouveauté : interprétation cinétique du splitting d'ondes.

Pistes à explorer :

- Procéder sans splitting d'ondes \Rightarrow une seule représentation cinétique au lieu de deux.
- Représentation cinétique à 4 vitesses $v(\xi_i)$, $1 \leq i \leq 4$.
- Modèle cinétique continu.

