

Schéma de reconstruction exact sur les chocs isolés

Mathieu Rigal

Encadrante : Nina Aguillon

Stage de fin d'études, Inria Paris

18 novembre 2019



1 Etat de l'art : méthodes volumes-finis pour les lois de conservation

- Lois de conservation
- Méthodes volumes-finis
- Aspect diffusif des méthodes usuelles

2 Présentation du schéma de reconstruction des chocs

- Détection des chocs
- Opérateur de reconstruction
- Calcul des flux

3 Application du schéma aux équations de Saint-Venant

- Cas sans topographie
- Vers la prise en compte d'une topographie quelconque

Etat de l'art : méthodes volumes-finis

Lois de conservation

Loi de conservation \rightarrow transport de N quantités $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$

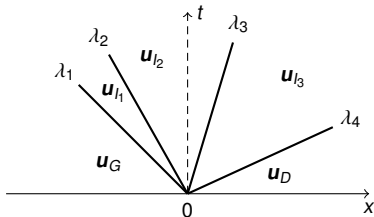
Domaine d'étude : $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$

Forme intégrale :

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{u}(t_1, x) dx - \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{u}(t_0, x) dx = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_0)) dt - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_1)) dt$$
$$\forall (t_0, x_0) \in \Omega, \forall (t_1, x_1) \in \Omega \quad (1)$$

Forme conservative : $\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0$ sur Ω

Problème de Riemann : $\mathbf{u}(t = 0, x) = \mathbf{u}_G \mathbf{1}_{x < 0} + \mathbf{u}_D \mathbf{1}_{x \geq 0}$



Relation de Rankine-Hugoniot :

$$\sigma(\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_D) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_G) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_D)$$

Critère entropique de Lax :

$$\lambda(\mathbf{u}_G) > \sigma > \lambda(\mathbf{u}_D)$$

Etat de l'art : méthodes volumes-finis

Quelques schémas classiques

Maillage constitué de cellules $(C_i)_{0 \leq i \leq N_x-1}$ centrées en $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$

Notation : $\tilde{\mathbf{U}}_i^n$ solution moyennée sur C_i au temps t_n .

La loi de conservation (1) implique :

$$\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_i^n - \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_{i+1/2})) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_{i-1/2})) dt \right) \quad (2)$$

Schémas volumes-finis obtenus par approximation des flux :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) \quad (3)$$

	Flux numérique $\mathbf{F}(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D)$
Godunov	$\mathbf{f}(\mathbf{u}^*(x/t = 0))$, \mathbf{u}^* sol. auto-similaire du pb de Riemann $(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D)$
HLL	$[\lambda_D \lambda_G (\mathbf{U}_D - \mathbf{U}_G) + \lambda_D \mathbf{f}(\mathbf{U}_G) - \lambda_G \mathbf{f}(\mathbf{U}_D)] / [\lambda_D - \lambda_G]$
Rusanov	$(\mathbf{f}(\mathbf{U}_G^n) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_D^n) - a (\mathbf{U}_D^n - \mathbf{U}_G^n))/2$

Etat de l'art : méthodes volumes-finis

Phénomène de diffusion par moyennation

Processus de moyennation \implies nature **diffusive** des schémas VF

Exemple : schéma de Rusanov pour le transport linéaire ($\partial_t u + a \partial_x u = 0$, $a > 0$)

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{2a}, \text{ avec } \text{CFL} \in (0, 1]$$

Le schéma (3) s'écrit dans ce cas :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\text{CFL}}{2} (u_i^n - u_{i-1}^n) = \left(1 - \frac{\text{CFL}}{2}\right) u_i^n + \frac{\text{CFL}}{2} u_{i-1}^n$$

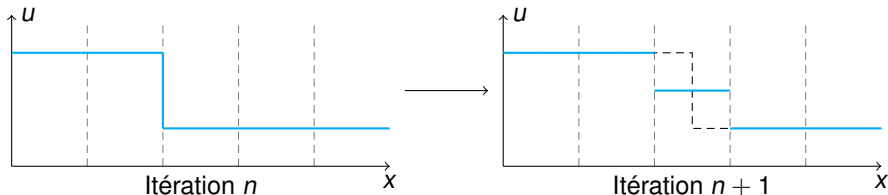


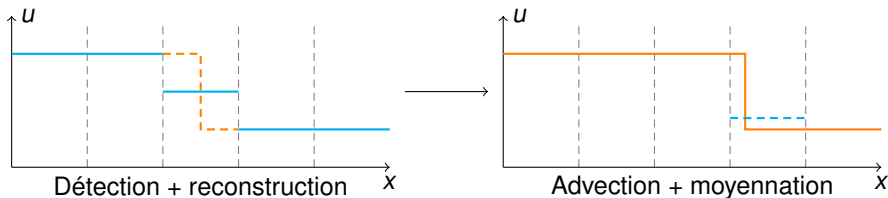
Schéma de reconstruction des chocs

Principe de base

But : reconstruire les chocs potentiels avant le calcul des flux

Processus en trois étapes :

- 1 Détecter les cellules comportant un choc potentiel
- 2 Déterminer les états reconstruits et la position du choc
- 3 Calcul des flux



Pour la cellule C_i , la détection se fait en considérant le pb de Riemann ($\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_{i+1}$)

Schéma de reconstruction des chocs

Opérateur de reconstruction

Définition (Opérateur de reconstruction)

Un opérateur de reconstruction est une fonction $\mathcal{R} : (\mathbb{R}^N)^3 \rightarrow (\mathbb{R}^N)^2$ telle que pour tout couple d'états $(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D)$ reliés par un choc entropique, $\forall \alpha \in (0, 1)$,

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}_G, \alpha \mathbf{U}_G + (1 - \alpha) \mathbf{U}_D, \mathbf{U}_D) = (\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D)$$

Si aucun choc n'est détecté dans la cellule C_i , alors :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_I, \mathbf{U}_D) = (\mathbf{U}_I, \mathbf{U}_I)$$

Le vecteur position $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N)$ des composantes du choc dans la cellule C_i vérifie (pour que la reconstruction soit conservative) :

$$\Delta x \mathbf{U}_j^{n,i} = \delta_j^{n,i} \tilde{\mathbf{U}}_{G,j}^{n,i} + (\Delta x - \delta_j^{n,i}) \tilde{\mathbf{U}}_{D,j}^{n,i} \Rightarrow \delta_j^{n,i} = \begin{cases} \frac{\mathbf{U}_j^{n,i} - \tilde{\mathbf{U}}_{D,j}^{n,i}}{\tilde{\mathbf{U}}_{G,j}^{n,i} - \tilde{\mathbf{U}}_{D,j}^{n,i}} \Delta x & \text{si } \tilde{\mathbf{U}}_{G,j}^{n,i} \neq \tilde{\mathbf{U}}_{D,j}^{n,i} \\ 0 & \text{si } \tilde{\mathbf{U}}_{G,j}^{n,i} = \tilde{\mathbf{U}}_{D,j}^{n,i} \end{cases}$$

Comment calculer les flux ?

- maillage mobile → évite la gestion des collisions entre chocs
- flux numérique → flux exact évalué au niveau de l'état courant

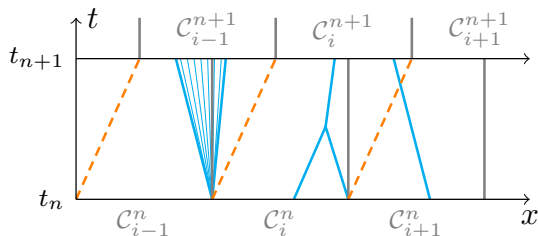
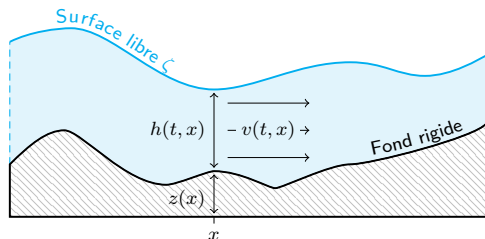


FIGURE – Sur maillage mobile, au plus une intersection onde/interface est à prendre en compte.

Application aux équations de Saint-Venant

Cas sans topographie

Equations de Saint-Venant → modélisation des écoulements peu profonds



$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + \partial_x (hv^2 + gh^2/2) = 0 \end{cases}$$

avec $q = hv$ le débit

Détection des chocs simplifiée grâce au lemme

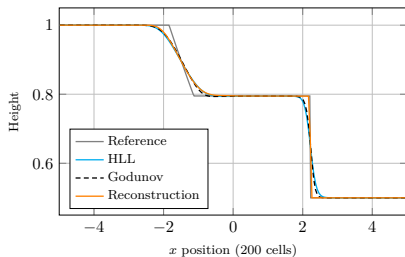
Lemme (Caractérisation des chocs)

Le problème de Riemann entre $\mathbf{u}_G = (h_G, h_G v_G)$ et $\mathbf{u}_D = (h_D, h_D v_D)$ comporte un 1-choc si $v_G > v_D$ et $h_G < h_D$, et comporte un 2-choc si $v_G > v_D$ et $h_D < h_G$.

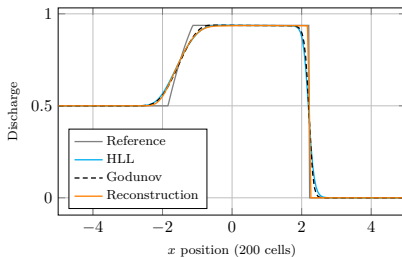
Application aux équations de Saint-Venant

Cas sans topographie

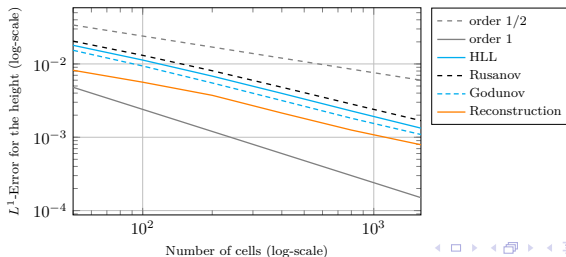
Riemann problem for the Saint-Venant system



Riemann problem for the Saint-Venant system



Convergence rate of different schemes



Application aux équations de Saint-Venant

Vers la prise en compte d'une topographie quelconque

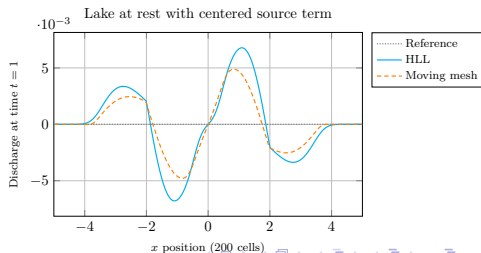
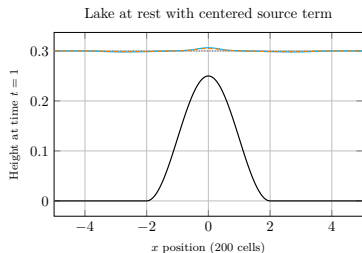
Modélisation d'une topographie z par l'intermédiaire d'un **terme source** :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + \partial_x (hv^2 + gh^2/2) = -ghz' \end{cases}$$

Objectif : préserver l'état stationnaire ($(h + z)(t = 0, \cdot) = \text{Cst}$, $v(t = 0, \cdot) = 0$)
→ on parle de schéma *bien équilibré*

Problème : état stationnaire mal préservé si la discrétisation de $-ghz'$ est centrée

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta X} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) + \Delta t_n \mathbf{S}_i^n \quad (4)$$

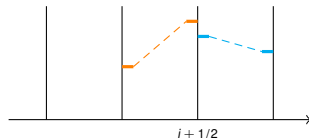


Application aux équations de Saint-Venant

Vers la prise en compte d'une topographie quelconque

Remède : reconstruction hydrostatique

- reconstruction $\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n$ aux voisinages gauche et droit de $x_{i+1/2}$
- contribution de \mathbf{S}_i^n intégrée aux flux $\mathcal{F}_G, \mathcal{F}_D$

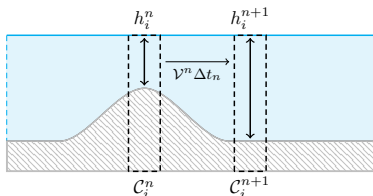


$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta X} [\mathcal{F}_G(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}_D(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n)] \quad (5)$$

Sur **maillage fixe** : schéma bien équilibré si dans le cas du lac au repos

$$\mathcal{F}_G(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) = \mathcal{F}_D(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n)$$

Sur **maillage mobile** : variation de topographie $z_i^{n+1} - z_i^n$ à prendre en compte

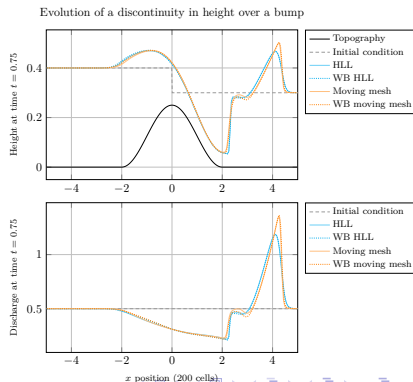
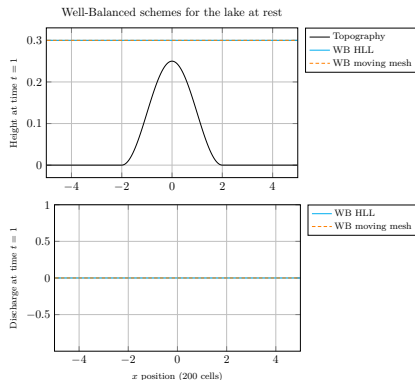


Application aux équations de Saint-Venant

Vers la prise en compte d'une topographie quelconque

Reconstruction hydrostatique sur maillage mobile

- nécessite l'introduction d'un terme source artificiel pour la 1^{ère} composante.
- la hauteur d'eau n'est donc plus conservée...
- ... mais la variation de hauteur d'eau totale est réversible si le maillage revient à sa position initiale.



Points abordés :

- les méthodes volumes-finis et leur aspect diffusif en général
- un schéma de reconstruction des chocs dissipés par moyennation
- l'application de ce schéma aux équations de Saint-Venant sans topographie
- l'étude et la mise en œuvre de la reconstruction hydrostatique sur maillage mobile

Perspectives :

- gestion des transitions sec/mouillé du schéma de reconstruction hydrostatique sur maillage mobile à améliorer
- combinaison de la reconstruction des chocs et de la reconstruction hydrostatique