

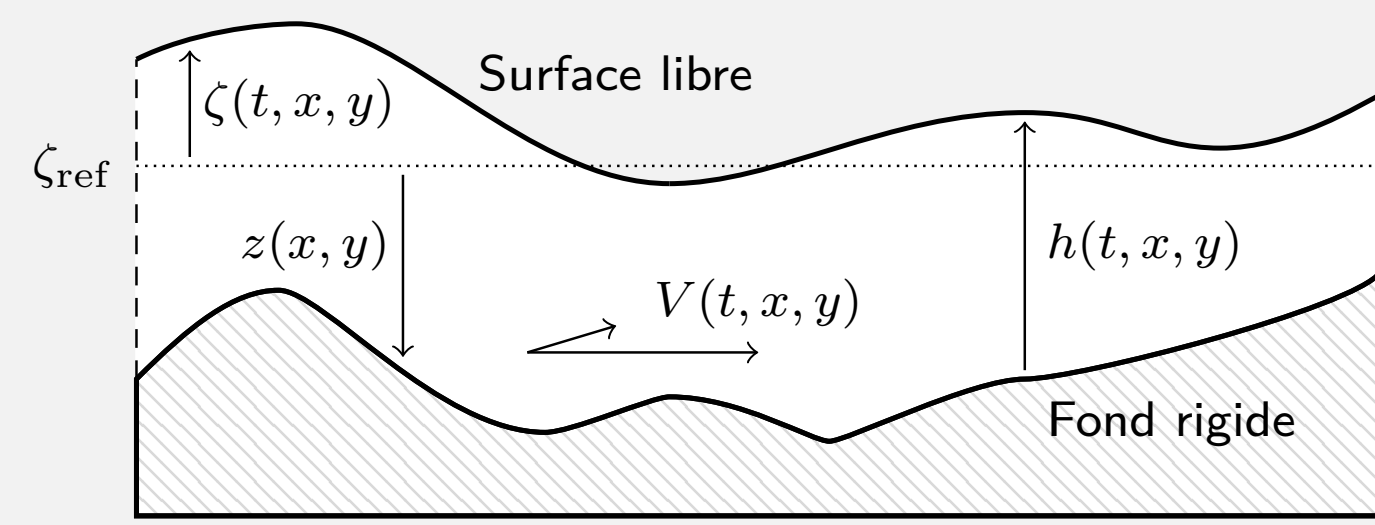
# Schémas bas Froude IMEX pour les équations de Saint-Venant

Mathieu Rigal

mathieu.rigal@inria.fr

## Equations de Saint-Venant adimensionnées [1/8]

Les équations de Saint-Venant modélisent les écoulements fluides en eaux peu profondes sur une topographie fixée  $z(x, y) \in \mathbb{R}$ . Les quantités d'intérêts sont la hauteur d'eau  $h(t, x, y) \in \mathbb{R}_+$  et la vitesse  $V(t, x, y) \in \mathbb{R}^2$ , et satisfont la loi de conservation avec terme source ci-dessous.



$$(\mathcal{P}_{Fr}) \quad \begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (hV) = 0 \\ \partial_t (hV) + \nabla \cdot (hV \otimes V) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla h^2 = -\frac{h}{Fr^2} \nabla z \end{cases}$$

Nombre de Froude :  $Fr = \frac{\text{vitesse particules}}{\text{vitesse ondes acoustiques}} \approx 10^{-2}$  (écoulements côtiers)

**Problème** : méthodes explicites stables sous une contrainte CFL acoustique

$$(1) \quad \Delta t \leq \min \left( \frac{Fr \delta}{Fr |V \cdot n| + \sqrt{h}} \right) = \mathcal{O}(Fr \delta), \quad \delta = \text{résolution du maillage}$$

## Splitting d'ondes et intégration semi-implicite [2/8]

Contrainte (1) trop restrictive car  $\Delta t \rightarrow 0$  dans la limite bas Froude. Objectif :  $\Delta t = \mathcal{O}(\delta)$ . On décompose  $(\mathcal{P}_{Fr})$  en une partie convective  $\nabla \cdot \mathcal{K}$  et une partie acoustique  $\mathcal{G}$  :

$$\partial_t U + \nabla \cdot \mathcal{K}(U, z) + \mathcal{G}(U, z) = 0, \quad U = \begin{pmatrix} h \\ hV \end{pmatrix}$$

A l'instar de [1] on pose  $\mathcal{G}(U, z) := [\nabla \cdot (hV), (-z/Fr^2) \nabla(h+z)]^T$ , et le flux  $\mathcal{K}$  est défini de manière à retrouver  $(\mathcal{P}_{Fr})$ . Ce choix offre plusieurs avantages :

- valeurs propres de  $\mathcal{K}(\cdot, z)$  bornées quand  $Fr \rightarrow 0$ ;
- $\mathcal{G}$  linéaire, lacs au repos  $\{V = 0, \nabla(h+z) = 0\} \subset \ker \mathcal{G}$  (états stationnaires) ;

Stratégie *Runge-Kutta semi-implicite* (IMEX-RK) : expliciter  $\nabla \cdot \mathcal{K}$  et impliciter  $\mathcal{G}$ .

→ *stabilité asymptotique* (CFL uniforme en  $Fr$ ).

## Limite bas Froude et contrainte d'incompressibilité [3/8]

Formellement, système limite  $(\mathcal{P}_0)$  retrouvé en considérant le développement :

$$(2) \quad h = h^{(0)} + Fr h^{(1)} + Fr^2 h^{(2)} + \mathcal{O}(Fr^3), \quad V = V^{(0)} + Fr V^{(1)} + Fr^2 V^{(2)} + \mathcal{O}(Fr^3)$$

On injecte (2) dans  $(\mathcal{P}_{Fr})$  et l'on identifie les termes en facteur d'une même puissance. Pour des conditions aux bords périodiques il vient :

$$(\mathcal{P}_0) \quad \begin{cases} (h^{(0)}, h^{(0)} V^{(0)})(t > 0, \cdot) \in \ker \mathcal{G}(\cdot, z) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ hV \end{pmatrix}, \nabla \cdot (hV) = 0, \nabla(h+z) = 0 \right\} \\ \partial_t V^{(0)} + (V^{(0)} \cdot \nabla) V^{(0)} + \nabla h^{(2)} = 0 \end{cases}$$

Contrainte supplémentaire :  $\nabla h^{(1)} = 0$ , d'où  $\nabla(h+z) = \mathcal{O}(Fr^2)$  (important si  $0 < Fr \ll 1$ ).

**Définition** (Données bien préparées).

$$\mathbb{W} := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} Fr^k \begin{pmatrix} h^{(k)} \\ h^{(k)} V^{(k)} \end{pmatrix} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} h^{(0)} \\ h^{(0)} V^{(0)} \end{pmatrix} \in \ker \mathcal{G}(\cdot, z), \nabla h^{(1)} = 0 \right\}$$

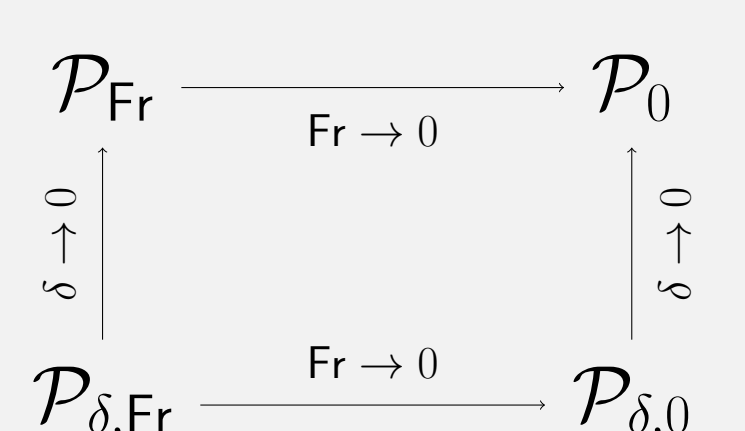
**Remarque 1** : Si  $z \equiv \text{Cste}$ ,  $\ker \mathcal{G} = \{\nabla h = 0, \nabla \cdot V = 0\} \rightarrow$  états *incompressibles*. Si de plus  $U(t=0) \in \mathbb{W}$  est solution de  $(\mathcal{P}_{Fr})$ , alors  $U$  converge vers une solution de  $(\mathcal{P}_0)$  uniformément en temps lorsque  $Fr \rightarrow 0$ .

## Consistance asymptotique et propriété d'invariance [4/8]

Analogie discret de la propriété de convergence de la remarque 1 ?

Si  $\mathcal{P}_{\delta, Fr}$  fait référence à un schéma consistant avec  $(\mathcal{P}_{Fr})$ , on veut que le schéma limite  $\mathcal{P}_{\delta, 0}$  soit consistant avec  $(\mathcal{P}_0)$ .

→ *consistance asymptotique* (erreur uniforme en  $Fr$ )



**Théorème 1** (Schochet, [2]). *La composante compressible des solutions de  $(\mathcal{P}_{Fr})$  initialement dans  $\mathbb{W}$  reste petite sur une échelle de temps convective  $\tau_c = \mathcal{O}(1)$ .*

Il est primordial de préserver les états quasi-incompressibles. Notamment, un schéma ne doit pas amplifier la partie compressible sur une échelle de temps acoustique  $\tau_a = \mathcal{O}(Fr)$ .

Condition suffisante dans le cas sans convection ( $\mathcal{K} \equiv 0$ ) :

**Théorème 2** (Dellacherie, [3]). *Soit un schéma d'équation modifiée  $(\partial_t + \mathcal{F})U = 0$ , avec  $\mathcal{F}$  linéaire. Si cette EDP laisse  $\ker \mathcal{G}$  invariant, alors ses solutions  $U$  vérifient*

$$\inf_{W \in \ker \mathcal{G}} \|U(t=0, \cdot) - W\|_{L^2} = \mathcal{O}(Fr) \quad \Rightarrow \quad \inf_{W \in \ker \mathcal{G}} \|U(t > 0, \cdot) - W\|_{L^2} = \mathcal{O}(Fr)$$

## Un premier schéma d'ordre 1 [5/8]

On propose un premier schéma naïf pour illustrer la perte d'incompressibilité. En temps, une méthode Euler IMEX est utilisée. Discrétisation en espace sur grille Cartésienne :

- pour  $\mathcal{K}$  : solveur de Riemann approché (HLL) avec splitting directionnel ;
- pour  $\mathcal{G}$  : différences finies incorporant un terme de diffusion, ci-dessous, avec  $c = \sqrt{-z}/Fr$  ;

$$(3) \quad \bar{\mathcal{G}}(U, z)_{i,j} = \begin{pmatrix} \mu_x \bar{\partial}_x (hV_x) + \mu_y \bar{\partial}_y (hV_y) \\ c^2 \mu_x \bar{\partial}_x (h+z) \\ c^2 \mu_y \bar{\partial}_y (h+z) \end{pmatrix}_{i,j} - c_{i,j} \delta \begin{pmatrix} [(\bar{\partial}_x)^2 + (\bar{\partial}_y)^2] (h+z) \\ (\bar{\partial}_x)^2 (hV_x) \\ (\bar{\partial}_y)^2 (hV_y) \end{pmatrix}_{i,j}$$

Les opérateurs discrets ci-dessus sont définis par :

$$\bar{\partial}_x f(x, y) = \frac{f(x + \delta/2, y) - f(x - \delta/2, y)}{\delta}, \quad \mu_x f(x, y) = \frac{f(x + \delta/2, y) + f(x - \delta/2, y)}{2}$$

**Proposition 1.** *L'équation modifiée résultante ne préserve pas les états incompressibles.*

$$(\partial_t + \mathcal{G} + R_\delta - R_{\Delta t})U = 0, \quad R_{\Delta t} \propto \mathcal{G}, \quad R_\delta U = -c\delta(\Delta(h+z), \partial_{xx}^2(hV_x), \partial_{yy}^2(hV_y))^T$$

**Remarque 2** : Indépendamment du choix de la méthode IMEX-RK, on a  $\ker \mathcal{G} \subset \ker R_{\Delta t}$ . Par ailleurs la condition de divergence nulle sur le débit n'implique pas  $\partial_{xx}^2(hV_x) = 0$  ou  $\partial_{yy}^2(hV_y) = 0$ , d'où  $\ker \mathcal{G} \not\subset \ker R_\delta$ .

## Correction du défaut de perte d'incompressibilité [6/8]

La précision du schéma naïf se détériore fortement pour  $Fr \ll 1$  (voir encart [7/8]). D'après la remarque 2, ce défaut provient de la discrétisation de  $\mathcal{G}$ . Une correction se base sur la

**Proposition 2.** *Si  $\ker \mathcal{G} \subset \ker R_\delta^*$ , alors  $(\partial_t + \mathcal{G} + R_\delta^* - R_{\Delta t})U = 0$  préserve les états incompressibles.*

On propose la modification suivante :

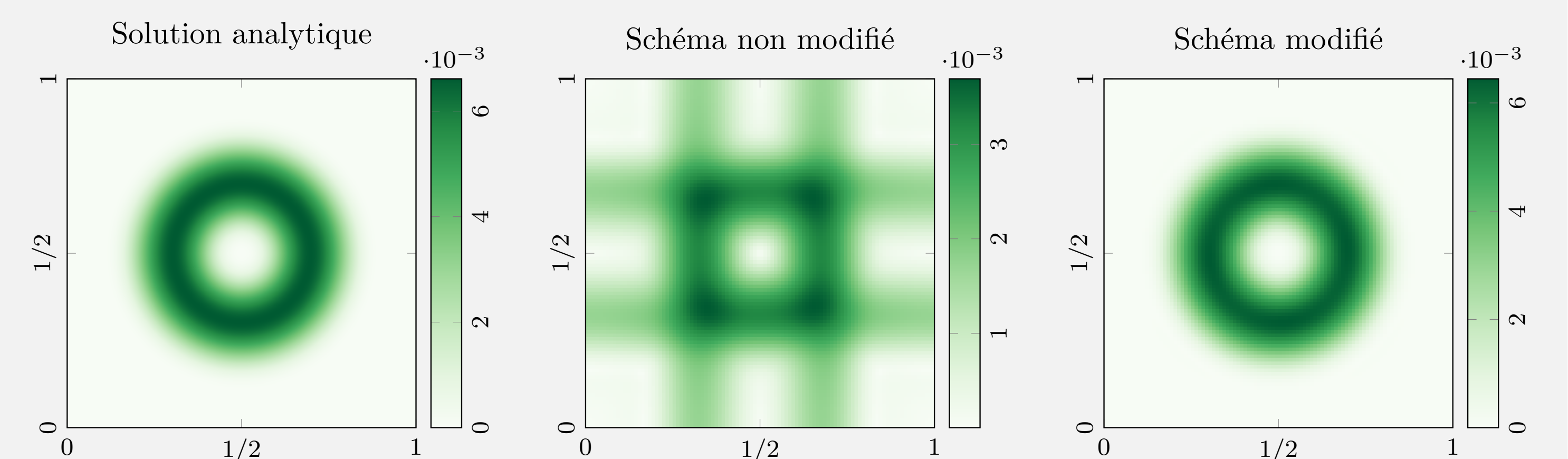
$$(4) \quad \bar{\mathcal{G}}^*(U, z)_{i,j} = \bar{\mathcal{G}}(U, z)_{i,j} - c_{i,j} \delta (\mu_x \bar{\partial}_x)(\mu_y \bar{\partial}_y) \begin{pmatrix} 0 \\ hV_y \\ hV_x \end{pmatrix}_{i,j}$$

L'erreur en espace est désormais  $R_\delta^* U = -c\delta(\Delta(h+z), \nabla[\nabla \cdot (hV)])^T \Rightarrow \ker \mathcal{G} \subset \ker R_\delta^*$ .

La partie compressible est contrôlée, de plus le schéma préserve les lacs au repos.

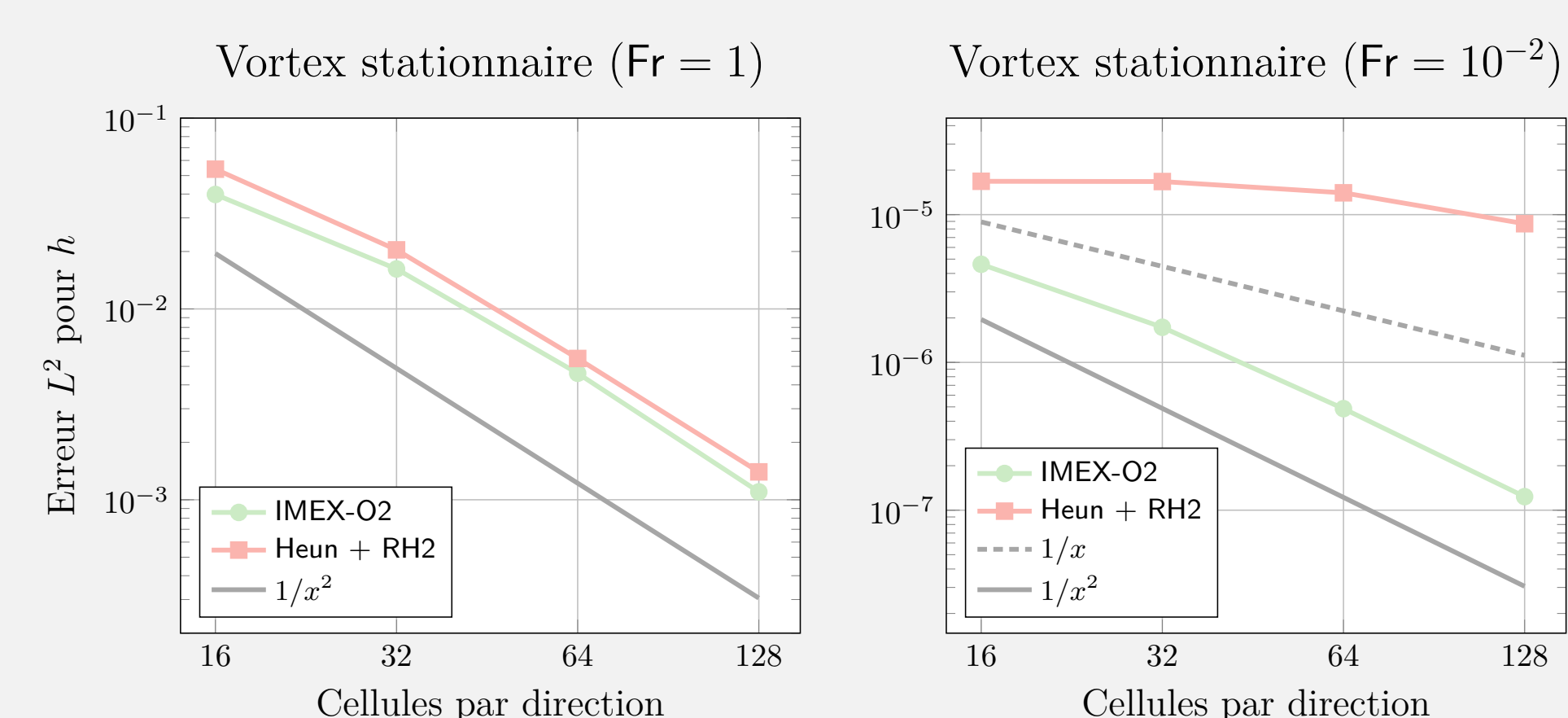
## Cas test : vortex stationnaire sur fond variable [7/8]

Le nombre de Froude local est affiché au temps acoustique  $t = 5 \times Fr$ , avec  $Fr = 10^{-2}$ . La résolution de la grille est de  $100 \times 100$ .



## Passage à l'ordre 2 et nouveau critère d'invariance [8/8]

Intégration en temps : ARS-222. Reconstruction MUSCL pour  $\mathcal{K}$ , différences centrées pour  $\mathcal{G}$ . On compare ce schéma à une méthode volumes finis explicite sans splitting d'ordre 2.



Dégradation de l'ordre de convergence pour le schéma explicite lorsque  $Fr \rightarrow 0$ . Le schéma IMEX semble insensible au paramètre d'échelle.

Aucune de ces méthodes ne satisfait le critère d'invariance du théorème 2.

Piste à explorer : condition du théorème 2 trop forte. A la place, il suffirait d'avoir :

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathcal{F})U = 0 \\ U(t=0) \in \ker \mathcal{G} \end{cases} \Rightarrow U(t > 0) \in \ker \mathcal{G} + \mathcal{O}(Fr)$$

[1] Georgij BISPEN et al. "IMEX Large Time Step Finite Volume Methods for Low Froude Number Shallow Water Flows." In : *Communications in Computational Physics* 16 (2014), p. 307-347.

[2] S. SCHOCHET. "Fast singular limits of hyperbolic PDEs." In : *J. Differ. Eqs.* 114 (1994), p. 476-512.

[3] Stéphane DELLACHERIE. "Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number." In : *Journal of Computational Physics* 229 (2010), p. 978-1016.