Université de Bordeaux

TPM103U Bases de Mathématiques pour les sciences, 2020

Chapitre 1 : Rudiments de logique

1.1. Opérations logiques

Une *proposition logique*, concernant divers objets mathématiques, est un énoncé qui doit être ou bien vrai (ce que l'on note V) ou bien faux (ce que l'on note F).

On construit avec ces propositions (ou "variables propositionnelles") de nouvelles propositions (ou "formules propositionnelles") en utilisant les connecteurs logiques.

Exemples :

- "$x + 1$" n'est pas une proposition.
- "$3 < -2$" est une proposition fausse.
- "$0 < 1$" est une proposition juste.

Connecteurs logiques :

1. La négation "**non**", notée $\neg$
2. La disjonction logique "**ou**", notée $\vee$
3. La conjonction logique "**et**", notée $\wedge$
4. L'**implication**, notée $\Rightarrow$
5. L'**équivalence**, notée $\Leftrightarrow$

La *valeur de vérité* d'une formule propositionnelle, c'est-à-dire l'interprétation de cette formule une fois que l'on s'est fixé des valeurs de vérité de ses variables propositionnelles, est définie par sa *table de vérité*. Ainsi, pour les formules définies par les connecteurs logiques élémentaires, on a les tables suivantes :

Tables de vérité

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exercice : Montrer que les propositions $p \Leftrightarrow q$ et $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ont les mêmes tables de vérité.

Implication $\Rightarrow$

Attention :

1. Dans le langage courant, “ou” a en général un sens exclusif (fromage “ou” dessert). En mathématiques, le “ou” est toujours “inclusif” : si p et q sont toutes les deux vraies, $p \vee q$ est vraie.

   Exemples :

   $(0 < -1) \vee (2 \text{ est impair}))$ est une proposition fausse.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x > 0) \vee (x - 1 < 0)$ est une proposition vraie.

2. Dire que ”$p \Rightarrow q$ est vrai” ne signifie pas que p est vraie mais seulement que *si l’hypothèse* p *est vraie, alors la conclusion* q *l’est aussi*. Noter que, si p est fausse

   alors $p \Rightarrow q$ est vrai... C’est pour cela que pour démontrer une implication $p \Rightarrow q$, on fait l’hypothèse que p est vraie, puisque si p est fausse il n’y a rien à démontrer. . .

   Exemples :

   $(0 < -1) \Rightarrow (2 \text{ est impair}))$ est une proposition vraie.

   $(0 < 1) \Rightarrow (2 \text{ est impair}))$ est une proposition fausse.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x > 0) \Rightarrow (x + 1 > 0)$ est une proposition vraie.

Dans un texte mathématique,

$\boxed{\text{on écrira souvent "}p \Rightarrow q\text{" pour dire que "}p \Rightarrow q \text{ est vraie"}}$.

Avec cet abus de notation la formule "$p \Rightarrow q$" se dit aussi parfois “si p, alors q”, ou bien "p implique q", ou bien “pour que p soit vraie, il faut que q soit vraie”, ou encore

- “une **condition suffisante** pour q est p”,
- “une **condition nécessaire** pour p est q”.

Exemple :

L'implication : $(x > 1) \Rightarrow (x \geq 0)$ est vraie.

La condition $(x > 1)$ est suffisante pour que la condition $(x \geq 0)$ soit vraie.

La condition $(x \geq 0)$ est nécessaire pour $(x > 1)$ soit vraie.

Equivalence $\Leftrightarrow$

Definition 1

On dit que deux formules propositionnelles F et G sont *équivalentes* et on écrit parfois $F \equiv G$), si elles ont même table de vérité.

Voici quelques exemples importants de formules équivalentes :

- $\neg(p \wedge q)$ est équivalent à $(\neg p) \vee (\neg q)$.
- $\neg(p \vee q)$ est équivalent à $(\neg p) \wedge (\neg q)$.
- $(p \Leftrightarrow q)$ est équivalent à $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.
- $(p \Rightarrow q)$ est équivalent à $((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
- $\neg(p \Rightarrow q)$ est équivalent à $p \wedge (\neg q)$

Montrons que les deux propositions suivantes $(p \Rightarrow q)$ et $((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$ sont équivalentes c'est-à-dire ils ont les même tables de vérités :

Montrons que les deux propositions suivantes $(p \Rightarrow q)$ et $((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$ sont équivalentes c'est-à-dire ils ont les même tables de vérités :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V

associativité et distributivité des connecteurs logiques

- $p \wedge (q \wedge r)$ est équivalent à $(p \wedge q) \wedge r$.
- $p \vee (q \vee r)$ est équivalent à $(p \vee q) \vee r$.
- $p \wedge (q \vee r))$ est équivalent à $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
- $p \vee (q \wedge r)$ est équivalent à $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Exercice : vérifier que tous ces énoncés sont vrais avec les tables de vérité.

Definition 2

- Le symbole $\forall$ signifie « quel que soit »(ou « pour tout »), on l'appelle le *quantificateur universel*.
- Le symbole $\exists$ signifie « il existe », on l'appelle le *quantificateur existentiel*.

Si $p(x)$ est une proposition dépendant d'une variable x qui appartient à un ensemble E, on définit deux nouvelles formules, à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$:

1. La proposition
$$\boxed{\forall x \in E,\ p(x)}$$
qui est vraie si ***la proposition* p(x) *est vraie pour tous les éléments* x *de* E**.
2. La proposition
$$\boxed{\exists x \in E,\ p(x)}$$
qui est vraie s'***il existe au moins un élément* x *de* E *pour lequel* p(x) *est vraie*** .

Exemple :

• La propostion : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ (x \geq 0)$ est fausse.

• La propostion : $\exists\ x \in \mathbb{R},\ (x \geq 0)$ est vraie.

Remarques

- Les variables sont muettes : $\forall x,\ p(x)$ et $\forall y,\ p(y)$ désignent la même proposition.
- La négation de $(\forall x \in E,\ p(x))$ est $(\exists x \in E,\ \neg(p(x)))$.
- La négation de $(\exists x \in E,\ p(x))$ est $(\forall x \in E,\ \neg(p(x)))$.

Exemple :

- La négation de "$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 2$" est "$\exists x \in \mathbb{R},\ x < 2$"
- $\neg(\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 + n$ est pair) est ($\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 + n$ est impair)
- La négation de la proposition "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\quad x \leq n$" est "$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad x > n$"
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit la P la proposition : "$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\quad y = f(x)$".
  $\neg P$: "$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad y \neq f(x)$ "

- L'ordre des quantificateurs est important, en général $(\forall x \in E, \exists y \in E, p(x, y))$ et $(\exists y \in E, \forall x \in E, p(x, y))$ sont deux propositions différentes.

  Les propositions
  P : "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x + y = 0$"
  et
  Q : "$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ x + y = 0$"
  sont différentes.

  En effet : la proposition P est vraie puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver $y = -x$ tel que $x + y = 0$.

  La proposition Q est fausse. En effet sa négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}\ \ x + y \neq 0$, est vraie, puisque

  pour tout $y \in \mathbb{R}$, on peut trouver $x = -y + 1$ tel que $x + y \neq 0$.

  $\neg Q$ vraie implique que Q fausse.

- Pour montrer que "$\exists x \in E, p(x)$" est vraie, il suffit de trouver un x particulier dans l'ensemble E pour lequel $p(x)$ est vraie.

  Exemple :
  Montrons que la proposition "$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 + n$ est pair" est vraie . Prenons $n = 1$ on a $n^2 + n = 1^2 + 1 = 2$ est pair. La prposition est donc vraie

- Montrer que "$\forall x \in E, p(x)$" est faux revient à montrer que "$\exists x \in E, \neg p(x)$" est vraie, donc il suffit de trouver un **contre-exemple**, c'est-à-dire un x pour lequel $p(x)$ est faux.

  Exemple :
  Pour montrer que la proposition P : "$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 2$" est fausse il suffit de montrer que sa négation $\neg P$: "$\exists x \in \mathbb{R},\ x < 2$" est vraie.
  pour $x = 1$ on a $x < 2$, donc $\neg P$ est vraie et par suite P est fausse.

Raisonnement par contraposée

1.3. Raisonnement par contraposée

Principe : Soient p et q deux propositions.

La **contraposée** de $p \Rightarrow q$ est $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

Pour montrer que la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie, le principe de **contraposition** assure qu'il est équivalent de démontrer que sa contraposée, $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$, est vraie.

La **réciproque** de $p \Rightarrow q$ est $q \Rightarrow p$.

Attention : Ne pas confondre la contraposée et la réciproque de $p \Rightarrow q$. La contraposée est équivalente à la proposition de départ, la réciproque ne l'est en général pas.

Exemple de raisonnement par contraposée

Soient x et y deux réels. Montrer que

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$$

Pour cela, montrons que la contraposée de cette implication est vraie.
La contarposée est :

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Supposons donc que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$.
En développant, on obtient

$$xy + y - x - 1 = xy - y + x - 1$$

.
Après simplification, $x = y$.

1.4. Raisonnement par l'absurde

Le **raisonnement par l'absurde** est un principe de démonstration fondé sur le principe logique du **tiers exclu** qui affirme que $p \vee \neg(p)$ est toujours vrai.

Principe de la démonstration par l'absurde : Supposons que l'on veuille prouver que la proposition p est vraie.
On suppose que $\neg(p)$ est vraie (ou que p est fausse), et l'on exhibe une contradiction.
On en conclut alors que l'hypothèse faite sur p est fausse, donc que p est vraie.

Exemple de raisonnement par l'absurde

Montrons par l'absurde que

$$x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$$

n'admet pas de racine entière.
On suppose que la propriété est fausse,
c'est-à-dire que $x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$ admet (au moins une) racine entière.
On note n_0 une telle racine. On a donc

$$n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0 - \sqrt{2} = 0.$$

Donc

$$\sqrt{2} = n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0.$$

Mais n_0 est entier, donc

$$n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0$$

également un nombre entier.
Donc $\sqrt{2}$ est entier, ce qui est impossible.
Par conséquent $x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$ n'admet pas de racine entière.

1.5. Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un principe de démonstration qui s'applique lorsque l'on veut démontrer qu'une certaine propriété $\mathcal{P}(n)$, dépendant d'un entier naturel n, est vraie pour tout entier.

Le principe est le suivant :

Soit n_0 un entier, et $\mathcal{P}(n)$ une propriété de l'entier n, définie pour tout $n \geq n_0$. On fait les hypothèses suivantes :

(R1) La propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

(R2) Pour tout $n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ est vraie.

Alors, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple de raisonnement par récurrence

Montrons par récurrence que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le nombre } 10^n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

$\forall n \in N$, soit

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}10^n - 1 \text{ est un multiple de } 9\text{"}.$$

Initialisation :
Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Pour $n = 0$, on a

$$10^n - 1 = 10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

et 0 est un multiple de 9. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Héridité : Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Suppsons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $10^n - 1$ est un multiple de 9. Donc il existe un entier m tel que $10^n - 1 = 9m$, ainsi

$$10^n = 9m + 1.$$

$$\begin{aligned}
10^{n+1} - 1 &= 10 \times 10^n - 1 \\
&= 10 \times (9m + 1) - 1 \\
&= 9 \times 10 \times m + 10 - 1 \\
&= 9 \times 10 \times m + 9 \\
&= 9 \times (10 \times m + 1)
\end{aligned}$$

Comme $10 \times m + 1$ est un entier, $10^{n+1} - 1$ est un multiple de 9. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$.
Conclusion : La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, 10^n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

1.6. Combinaisons, coefficients binômiaux, formule du binôme

Definition 3

Soit n un entier non nul. On appelle ≪ n factoriel ≫et note

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Par convention $0! = 1$.

Ainsi $1! = 1$, $2! = 2$ et $3! = 6$. $\dfrac{5!}{3!} = ?$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Remarque : $n!$ correspond au nombre d'ordres possibles pour n objets.

Definition 4

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une **combinaison de k éléments parmi** n est une partie à k éléments d'un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k.

Par exemple si on a 50 personnes, il y a $\binom{50}{10}$ échantillons possibles de 10 personnes.

Si on dispose d'un jeu de 32 cartes, il y a $\binom{32}{8}$ ≪ mains ≫possibles différentes de 8 cartes.

Proposition 5

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 \leq k \leq n$, *on a :* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
3. *Si* $0 < k < n$, *on a :* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Exemples

$\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$.
$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2 + 1 = 3$.

cette dernière propriété est à la base du ”triangle de Pascal” dont les premières lignes son treprésentées sur la figure suivante

$n = 0$							1						
$n = 1$						1		1					
$n = 2$					1		2		1				
$n = 3$				1		3		3		1			
$n = 4$			1		4		6		4		1		
$n = 5$		1		5		10		10		5		1	
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1

On utlisant un raisonement par récurrence nous avons le résultat suivant

Proposition 6

Si $0 \leq k \leq n$ sont deux entiers naturels, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

Proposition 7

(Formule du binôme) Soient x et y deux réels (ou deux complexes) et n un entier naturel. On a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Exemples

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Pour la preuve on fait une récurrence sur n, pour x et y fixés.

Initialisation ($n = 0$) : on a $(x + y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

et montrons qu'elle se transmet au rang $n + 1$. On a :

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \text{ grâce à l'hypothèse de récurrence} \\
&= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+\mathbf{1}} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+\mathbf{1}-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \\
&= y^{n+1} + \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k}\right] + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

Donc notre formule est vraie pour tout $n \geq 0$