Université de Bordeaux

TPM103U Bases de Mathématiques pour les sciences, 2020

Chapitre 2 : Nombres réels, inégalités, valeur absolue

I. Rationnels et irrationnels

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \ \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad - bc = 0$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est trop petit : d'après le théorème de Pythagore, par exemple, la longueur x de la diagonale d'un carré de côté 1 vérifie $x^2 = 2$. Cependant on démontre par l'absurde qu'un tel réel ne peut pas être rationnel.

Proposition 1

Il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$

Il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$

Démonstration.

On procède par l'absurde. Supposons qu'un tel rationnel existe. Il s'écrirait donc $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers et premiers entre eux. a et b vérifieraient donc

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

soit

$$a^2 = 2b^2.$$

a est donc un entier dont le carré est pair : on en déduit que a est pair.
Mais alors a^2 est en fait multiple de 4 : en effet, puisque a est pair, il existe un entier k tel que $a = 2k$, donc

$$a^2 = 4k^2.$$

On en déduit alors

$$b^2 = 2k^2.$$

b^2 est donc pair, donc b aussi : finalement a et b sont tous les deux pairs, et ils ne peuvent donc pas être premiers entre eux.On a ainsi obtenu une contradiction. $\square$

Inégalités

Les nombres réels sont ordonnés.
Rappelons les propriétés que vérifient les relations d'inégalité :
Quels que soient les réels x, y, z, t :

1. $x \leq y$ si et seulement si $y - x \geq 0$
   (Pour démontrer une inégalité, on peut donc toujours se ramener à étudier le signe d'une quantité)
2. $(x \leq y$ et $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (*transitivité*)
3. $(x \leq y$ et $z \leq t) \Rightarrow x + z \leq y + t$
4. Si $a > 0$, $x \leq y \Rightarrow ax \leq ay$
5. Si $a < 0$, $x \leq y \Rightarrow ax \geq ay$
6. On reverra plus tard qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I si $\forall\ x \in I$, et $\forall\ y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

   Ainsi la fonction $x \mapsto ax$ est croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$, décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$.

Exercice :

Représenter graphiquement l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient les inégalités suivantes :

- $y - x < 0$ et $x > 1$.
- $y - x < 0$ ou $x > 1$.

Inégalités

Proposition 2

Si x et y sont deux réels **positifs**, $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$
Si x et y sont deux réels **négatifs**, $x \leq y \Rightarrow y^2 \leq x^2$

Démonstration.

On suppose $x \leq y$, c'est-à-dire $y - x \geq 0$. On a

$$y^2 - x^2 = (y - x)(x + y).$$

Donc $y^2 - x^2$ est du signe de $x + y$.

- Si x et y sont positifs on a donc bien $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$,
- Si x et y sont négatifs, $x \leq y \Rightarrow y^2 \leq x^2$.

$\square$

Remarques :

- Ces inégalités traduisent le fait que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0[$.
- Lorsque x et y ne sont pas de même signe on ne peut pas comparer en général x^2 et y^2. On a d'une part $-1 \leq 2$ et $(-1)^2 \leq 2^2$. Et d'autre part $-3 \leq 2$ et $(-3)^2 \geq 2^2$.

Exercice :

Montrer que $(x+y)^2 \leq 2x^2+2y^2$ et $(x+y)^4 \leq 8x^4+8y^4$.

Proposition 3

Si x et y sont deux réels **strictement positifs,** $x \leq y \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$

Preuve à faire en exercice.

Remarque :

Si x et y sont deux réels **strictement négatifs,** $x \leq y \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$.

Ces inégalités traduisent le fait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

Exercice :

Représenter graphiquement l'ensemble de points dont les coordonnées (x, y) vérifient les inégalités suivantes :

$$x > 0 \text{ et } xy < 1.$$

Intervalles

Rappels de notations : on note par

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$.
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$.
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$.
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$.
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$.

Exercices :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

- $x^2 < x$.
- $x^2 - 3x > -2$.

Valeur absolue

Definition 4

Si x est un réel, sa valeur absolue, notée $|x|$, est

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

- $|x|$ mesure la **distance** du réel x au réel 0.
- Le réel x, $|x|$ est positif (ou nul).
- Si x et y sont deux réels, $|x - y|$ mesure la distance entre les réels x et y.

Remarques. Pour tout réel x

- $|x^2| = |x|^2 = x^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $x \leq |x|$.

Valeur absolue

Proposition 5

Pour tous réels x et y,

1. $|xy| = |x||y|$
2. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*
3. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y|$.
4. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
5. *Si* $r > 0$, $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$. *En particulier,* $\{x \in \mathbb{R}, |x| \leq r\} = [-r, r]$.
6. $\forall r \geq 0$, $|x-a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a-r, a+r]$.

Démonstration.

Pour le deuxième point, puisque les deux termes de l'inégalité sont positifs, il suffit de comparer leurs carrés. Nous avons

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

et

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = x^2 + y^2 + 2|xy|$$

Or $xy \leq |xy|$. On en déduit bien que $|x+y| \leq |x| + |y|$. $\square$

Remarques :

- Soit $r \geq 0$. On a $|x| \geq r \Leftrightarrow \; x \geq r \;$ ou $\; x \leq -r \Leftrightarrow x \in]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$.

- Soit $r \geq 0$ et $a \in \mathbb{R}$. $|x-a| \geq r \Leftrightarrow \; x - a \geq r \;$ ou $\; x - a \leq -r \Leftrightarrow x \geq r + a \;$ ou $\; x \leq -r + a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -r+a] \cup [r+a, +\infty[$.

Exemples : On va résoudre dans $\mathbb{R}$ quelques équations et inéquations.

- $|x-1| = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2$ ou $\; x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = 3$ ou $\; x = -1$. Donc l'ensemble des solutions est $S = \{3, \; -1\}$.

- $|x-1| < 2 \Leftrightarrow \; -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$
  Donc l'ensemble des solutions est $S =]-1, 3[$.

- $|x-1| \geq 2$ est la négation de $|x-1| < 2$. Donc l'ensemble de solutions est $S =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

- $|x-1| \leq 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

  Donc l'ensemble des solutions est $S = \{1\}$.

- $|x-1| = |x-2|$.

  On résoud l'équation sur différend intervalles en tenant compte du signe de $x-1$ et de $x-2$.

- Si $x < 1$ alors $x-1 < 0$ et $|x-1| = -(x-1)$, $x-2 < 0$ et $|x-2| = -(x-2)$.L'équation est équivalente à $-(x-1) = -(x-2)$, soit $1 = 2$. Il n'y a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty, 1[$.

- Si $1 \leq x < 2$ alors $x-1 \geq 0$ et $|x-1| = x-1$, $x-2 < 0$ et $|x-2| = -(x-2)$. L'équation est équivalente à $x-1 = -(x-2)$ soit $2x = 3$ puis $x = 3/2$. $3/2 \in [-1, 2[$. $3/2$ est l'unique solution dans l'intervalle $[-1, 2[$.

- Si $x \geq 2$ alors $x-1 \geq 0$ et $|x-1| = x-1$, $x-2 \geq 0$ et $|x-2| = x-2$. L'équation est équivalente à $x-1 = x-2$, soit $-1 = -2$. Il n'y a pas de solution dans l'intervalle $[2, +\infty[$.

Conclusion l'ensemble des solutions est $\{3/2\}$.

Remarque : $|x-1| = |x-2|$ signifie que x est à égale distance de 1 et de 2. Sur la droite réelle, $3/2$ est l'unique point qui vérifie cette propriété.

La fonction partie entière

Definition 6

Si x est un réel, la partie entière de x, notée $E(x)$, est l'entier inférieur ou égal à x le plus proche de x. $E(x)$ est donc caractérisé par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Par exemple, $E(1.6) = 1$ et $E(-1.2) = -2$.

Exercices :

- Dessiner la courbe de la fonction $x \mapsto E(x)$.
- Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.

  Donner des exemples où l'inégalité est stricte.

Proposition 7

Pour tout entier n et pour tout réel x, $E(x+n) = E(x) + n$.

Démonstration.

Il suffit de remarquer que $E(x) + n$ est bien un entier qui vérifie
$(E(x) + n) \leq x + n < (E(x) + n) + 1$ $\square$

Exercices :

- Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $2E(x) \leq E(2x)$. A-t-on égalité en général ?

- Comparer $E(x^2)$ et $E(x)^2$.