Université de Bordeaux

TPM103U Bases de Mathématiques pour les sciences, 2020

Chapitre 3 : Systèmes linéaires

Systèmes linéaires

De nombreux problèmes conduisent à la résolution de systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues :

- recherche d'un point satisfaisant à des contraintes ;

  Exemple : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère le point A de coordonnées $(1, -1)$. Trouver les points M de coordonnées (x, y) tels que les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{AM}$ soient respectivement perpendiculaires aux vecteurs $\vec{u}(1, 2)$ et $\vec{v}(-2, 1)$.

- problème d'interpolation : recherche d'un polynôme passant par des points donnés ;

  Exemple : Trouver les pôlynomes P de degrés 2 tels que $P(0) = 1$ et $P(1) = 2$.

- recherche de l'intersection de deux droites, d'une droite et d'un plan, etc.

  Exemple : Trouver le point d'intersection des droites d'équations $x - y = 1$ et $2x + y = 3$.

- décomposition d'une fraction en éléments simples.

  Exemple : Trouver les nombres réels a et b tels que $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$.

Problématique : on a n inconnues $x_1 \dots x_n$ et k équations linéaires dans ces inconnues de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots a_{kn}x_n & = b_k \end{cases}$$

Un tel système d'équations est appelé un système linéaire $k \times n$ (lignes $\times$ colonnes).

Pour étudier l'intersection de droites du plan, ou de plans de l'espace, on est amené à résoudre des "systèmes" du type suivant :

$$\begin{cases} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{cases} \qquad \text{(intersection de droites dans le plan)}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = & d' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}\right. \qquad \text{(intersection de plans dans l'espace).}$$

Les systèmes d'équations qui apparaissent dans la recherche des points d'intersection de droites ou de plans sont un cas particulier de ce qu'on appelle un système d'équations linéaires. De tels systèmes se rencontrent dans une très grande variété de situations.

Definition 1

Un système linéaire à n équations et p inconnues est un système d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right. \qquad (S)$$

où les coefficients a_{ij} et b_j sont fixés (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et les quantités x_1, x_2, ..., x_n sont les **inconnues** du système.

La **matrice** du système est obtenue en rangeant les coefficients des équations dans un tableau, comme ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Résoudre (S) signifie trouver tous les p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'éléments de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$, selon le contexte) qui vérifient simultanément toutes les équations du système (S).

Système échelonné

Les méthode de substitution, d'élimination de Gauss et de factorisation consistent à remplacer le système initial par un système équivalent "plus simple" que l'on sait résoudre facilement. Par "système équivalent" ,on entend "système ayant le même ensemble de solutions".

Comme le montrent les exemples suivants, un système est "facile" à résoudre dès lors qu'il est **échelonné** (voir définition plus loin).

- Premier exemple (simpliste...) :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & & & = & 2 \\ & -7y & & = & 5 \\ & & 2z & = & 4 \end{array}\right. \tag{S1}$$

  Dans ce cas, le système est immédiatement résolu, et admet pour unique solution le triplet $(2, -5/7, 2)$. C'est le cas particulier, très simple, d'un système *diagonal*.

- Deuxième exemple (à peine plus compliqué...) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & -7y & - & z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \text{(S2)}$$

À nouveau, en parcourant le système de bas en haut, on trouve d'abord la valeur de z avec la troisième équation, que l'on reporte dans la seconde équation pour trouver y, et on trouve enfin x avec la première équation (on obtient finalement le triplet $(1, -1, 2)$).

À nouveau, c'est la forme très particulière du système (*triangulaire*) qui a permis la résolution.

Ce second exemple est très proche de la situation générale : on peut toujours transformer un système linéaire en un système équivalent *échelonné*, c'est-à-dire "presque" triangulaire.

Definition 2

On dit qu'un système linéaire est *échelonné* si sa matrice est *échelonnée selon les lignes*, c'est-à-dire si chaque ligne commence par un nombre de zéros strictement supérieur au nombre de zéros débutant la ligne précédente :

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemples : Le système suivant est échelonné

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & + & 3u & = & 1 \\ & & & & z & + & 3t & & & = & 0 \\ & & & & & & t & + & 2u & = & 4 \\ & & & & & & & & u & = & 6 \end{array} \right.$$

mais pas celui-ci

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x & + & y & - & z & + & t & + & 3u & = & 1 \\
 & & & & z & + & 3t & + & 5u & = & 0 \\
 & & 2y & + & 3z & + & t & - & u & = & 2 \\
 & & & & & & t & + & u & = & 5
\end{array}\right.$$

... ni celui-là

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x & + & y & - & z & + & t & + & 3u & = & 1 \\
 & & & & z & + & 3t & + & 5u & = & 0 \\
 & & & & 2z & + & t & + & 2u & = & 4 \\
 & & & & & & t & + & u & = & 5
\end{array}\right. .$$

Réduction à un système échelonné

On décrit ci-dessous une liste de ”manipulations licites” sur un système d’équations linéaires, au sens où elles transforment le système en un système équivalent, c’est-à-dire ne modifient pas l’ensemble des solutions. Les équations du systèmes sont notées $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, ..., $\mathbf{L_n}$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (\mathbf{L_1}) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (\mathbf{L_2}) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (\mathbf{L_n}) \end{cases}$$

<u>Opérations licites pour la méthode de substitution</u> :

(1) Permuter les équations : $\mathbf{L_i} \longleftrightarrow \mathbf{L_j}$.

(2) Permuter des variables.

(3) Multiplier une équation par une constante α *non nulle* : $\mathbf{L_i} \to \alpha\mathbf{L_i}$.

(4) Ajouter une équation à une autre $\mathbf{L_i} \to \mathbf{L_i} + \mathbf{L_j}$.

On peut également combiner les opérations (3) et (4), c'est-à-dire

(5) ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres : $\mathbf{L}_{\boldsymbol{i}} \to \mathbf{L}_{\boldsymbol{i}} + \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{L}_{\boldsymbol{j}}$.

ou même
(6) remplacer l'équation L_i par une combinaison linéaire des autres équations, *y compris* L_i, à condition que le coefficient α_i de L_i soit *non nul* :

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{i}} \to \alpha_i \mathbf{L}_{\boldsymbol{i}} + \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{L}_{\boldsymbol{j}} \text{ avec } \alpha_i \neq 0.$$

On peut montrer que tout système d'équations linéaires peut-être transformé en un système échelonné équivalent par une succession d'opérations de l'un des types précédents. On va mettre en oeuvre cette méthode sur trois exemples qui illustrent les trois cas de figures qui se présentent lorsque l'on cherche à résoudre un système.

Exemple 1

Pour déterminer l'intersection, dans $\mathbb{R}^3$, des trois plans d'équations respectives $x + 2y - z = 1$, $2x + y - z = 5$ et $x - z = 5$, on résout le système :

Exemple1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 5 \\ x & & & - & z & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & - & z & = & 1 & \\ & & -3y & + & z & = & 3 & L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ & & -2y & & & = & 4 & L_3 \to L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & z & + & 2y & = & 1 & \\ & & z & - & 3y & = & 3 & y \leftrightarrow z\,. \\ & & & & -2y & = & 4 & \end{array}\right.$$

Le système est échelonné, et on peut le résoudre facilement en “remontant” depuis la troisième équation : on trouve $y = -2$, $z = -3$ et $x = 2$. Les trois plans s’intersectent donc au point de coordonnées $(2, -2, -3)$.

Exemple 2

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 4y - 3z = 5 \\ 5x + 10y - 8z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 & \\ z = 1 & L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ 2z = 2 & L_3 \to L_3 - 5L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 & \\ z = 1 & \\ 0 = 0 & L_3 \to L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Le système est échelonné et possède une infinité de solutions, à savoir tous les triplets de la forme $(4 - 2y, y, 1)$, où y parcourt $\mathbb{R}$. Géométriquement, c'est la droite passant par le point de coordonnées $(4, 0, 1)$ et dirigée par le vecteur $(-2, 1, 0)$.

Exemple 3

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 & \\ \quad y + 4z - 5w = 5 & L_2 \to 2L_2 - 3L_1 \\ \quad 3y + 12z - 15w = 7 & L_2 \to 2L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 & \\ \quad y + 4z - 5w = 5 & \\ \quad 0 = -8 & L_2 \to L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

Le système est échelonné, mais il n'a aucune solution, à cause de la dernière équation.

Exemple 4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ -x_3 + x_4 = 0 \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_4 = 2 \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases}$$

À nouveau, le système est échelonné, et on peut le résoudre facilement en ”remontant” depuis la quatrième équation : on trouve d'abord $x_4 = 1$ grâce à la dernière équation, , puis $x_3 = 1$ en reportant la valeur de x_4 dans la troisième équation et ainsi de suite. Le quadruplet $(1, 1, 1, 1)$ est donc l'unique solution du système considéré.

Système homogène associé à un système linéaire (complément)
À tout système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right. \qquad (S)$$

on associe un système homogène (dit " système homogène associé") :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & 0 \end{array}\right. \qquad (H)$$

obtenu en égalant les seconds membres à 0. Remarquons que l'ensemble des solutions de ce système homogène associé n'est **jamais vide** (il contient le vecteur nul), alors que le système initial peut, lui, ne pas avoir de solutions. Les solutions de (H) et (S) sont liées par le principe de "superposition" suivant :

Proposition 3

*L'ensemble des solutions de (S), **s'il est non vide**, s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (S) la solution générale de (H).*

Exercices corrigés (DS 2018).

(1) Résoudre le système suivant en indiquant les transformations utilisées à chaque étape et en écrivant les systèmes successifs

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 2 \\ 3a+2b+c & = & 9 \\ a-b+c & = & 0. \end{array}\right.$$

Solution. On résout le système par la méthode de réduction au système échelonné.

On obtient

$$\left\{\begin{array}{lclc} a+b+c & = & 2 & L_1 \\ 3a+2b+c & = & 9 & L_2 \\ a-b+c & = & 0 & L_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lclc} a+b+c & = & 2 & L_1 \to L_1 \\ 2a+b & = & 7 & L_2 - L_1 \to L_2 \\ -2b & = & -2 & L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

On obtient alors $b = 1$, $a = 3$ et $c = -2$.

(2) Déterminer tous les polynômes de degré 3, $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ qui vérifient

$$\begin{cases} P(1) & = & 0 \\ P'(1) & = & 9 \\ P(-1) & = & -2 \\ P(0) & = & -2. \end{cases}$$

Solution. Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ le polynôme donné. Sa dérivée est alors

$$P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c.$$

On substitue les valeurs de $X = 1$, $X = -1$ et $X = 0$ dans $P(X)$ et $X = -1$ dans $P'(X)$ et on obtient :

$$\begin{cases} P(1) & = & a & + & b & + & c & + & d & = & 0, \\ P'(1) & = & 3a & + & 2b & + & c & & & = & 9, \\ P(-1) & = & -a & + & b & - & c & + & d & = & -2, \\ P(0) & = & & & & & & & d & = & -2. \end{cases}$$

Puisque $d = -2$, on est amené à considérer le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} a + b + c & = & 2 \\ 3a + 2b + c & = & 9 \\ a - b + c & = & 0. \end{cases}$$

D'après la question 1, on obtient $a = 3$, $b = 1$ et $c = -2$ et puisque $d = -2$ alors le polynôme recherché est $P(X) = 3X^3 + X^2 - 2X - 2$.