

Assimilation d'images en Océanographie

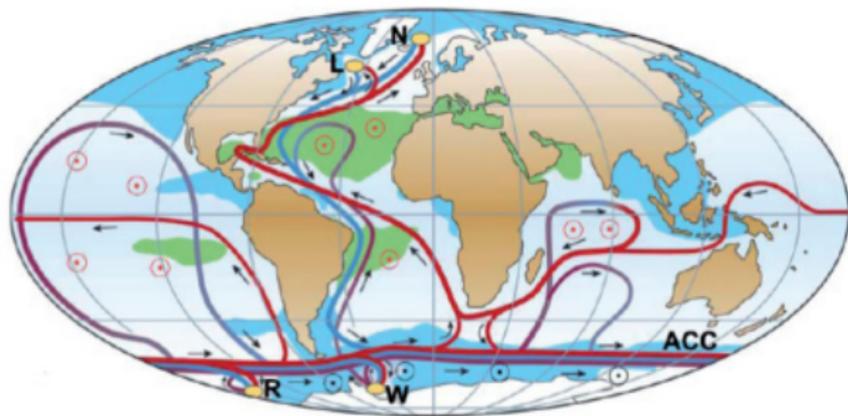
Nicolas Papadakis

Soirée de présentation masters et recherche

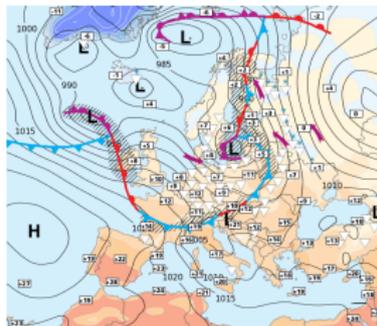
9 Octobre 2019



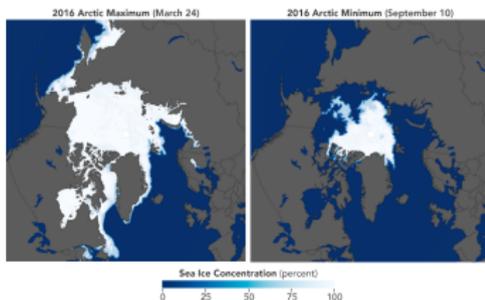
Comment utiliser les images pour prédire l'état de l'océan?



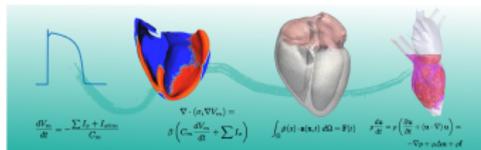
Assimilation: Comment prédire l'état d'un système dynamique?



Météorologie



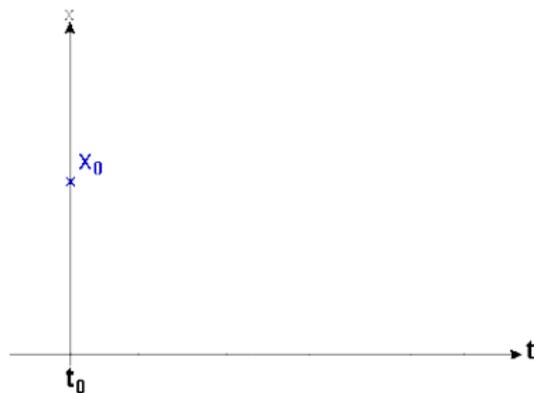
Glaciologie



Santé

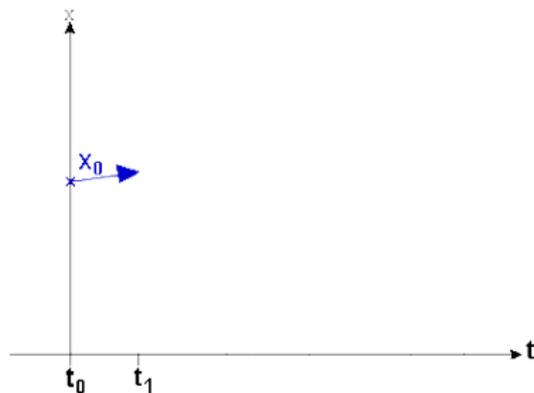
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse



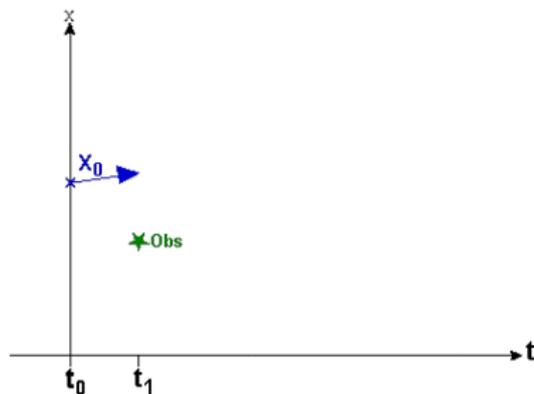
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse
- **Modèle dynamique** : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = 0$



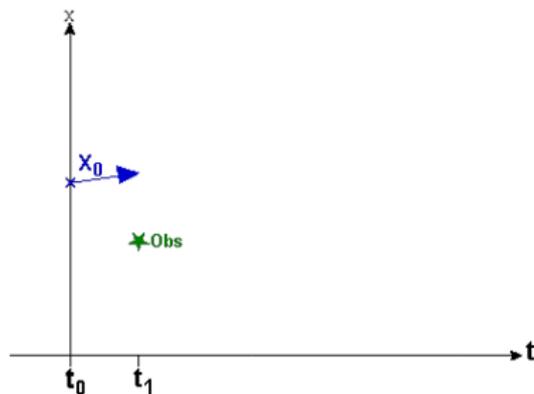
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse
- **Modèle dynamique** : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = 0$
- **Observations** : mesure GPS de $x(t)$ à certains instants t_i



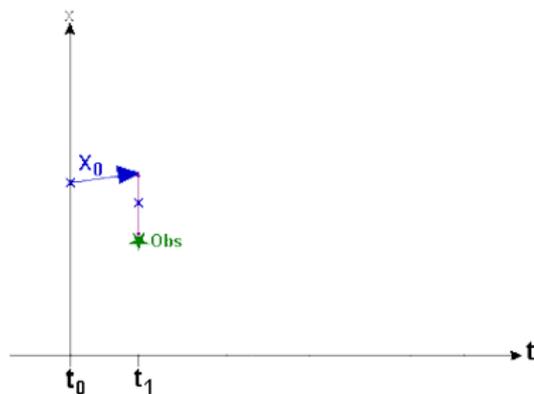
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse
- **Modèle dynamique** : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = 0$
- **Observations** : mesure GPS de $x(t)$ à certains instants t_i
- **Erreurs** : Incertitude GPS, modèle imparfait (frottements...)



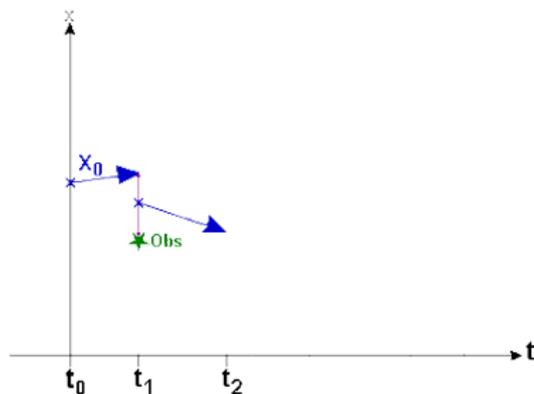
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse
- **Modèle dynamique** : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = 0$
- **Observations** : mesure GPS de $x(t)$ à certains instants t_i
- **Erreurs** : Incertitude GPS, modèle imparfait (frottements...)
- Trouver un **compromis**



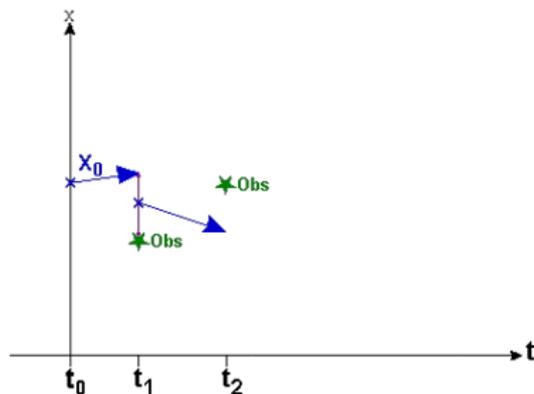
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse
- **Modèle dynamique** : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = 0$
- **Observations** : mesure GPS de $x(t)$ à certains instants t_i
- **Erreurs** : Incertitude GPS, modèle imparfait (frottements...)
- Trouver un **compromis**



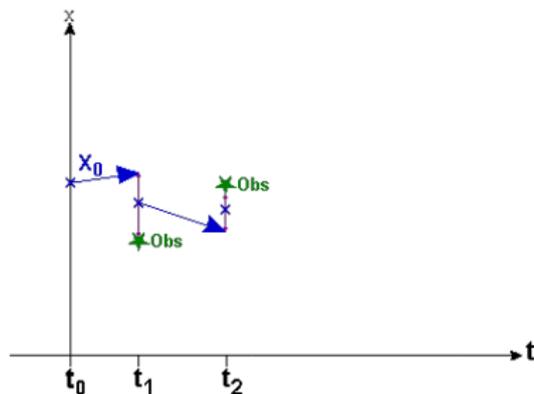
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse
- **Modèle dynamique** : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = 0$
- **Observations** : mesure GPS de $x(t)$ à certains instants t_i
- **Erreurs** : Incertitude GPS, modèle imparfait (frottements...)
- Trouver un **compromis**



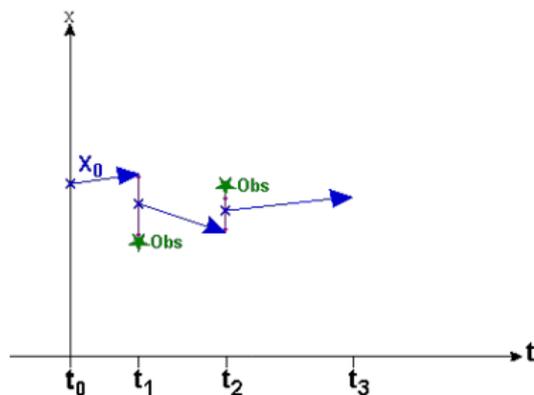
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse
- **Modèle dynamique** : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = 0$
- **Observations** : mesure GPS de $x(t)$ à certains instants t_i
- **Erreurs** : Incertitude GPS, modèle imparfait (frottements...)
- Trouver un **compromis**



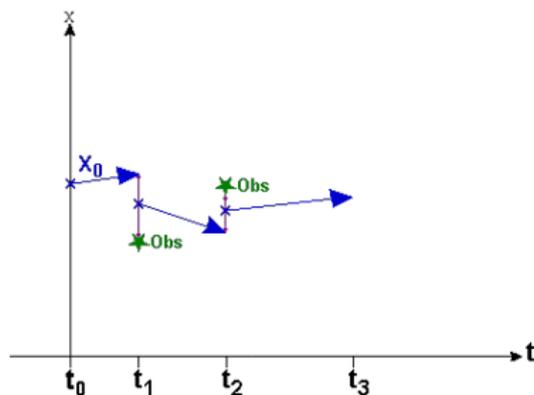
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse
- **Modèle dynamique** : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = 0$
- **Observations** : mesure GPS de $x(t)$ à certains instants t_i
- **Erreurs** : Incertitude GPS, modèle imparfait (frottements...)
- Trouver un **compromis**



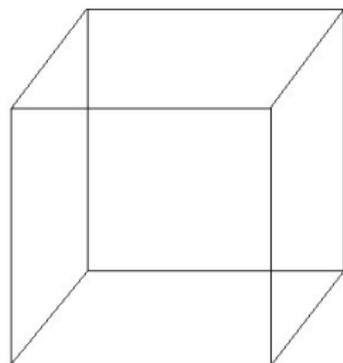
Exemple : prédiction d'une trajectoire

- **Variable physiques** : $x(t)$ position d'un objet, $v(t)$ sa vitesse
- **Modèle dynamique** : $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = 0$
- **Observations** : mesure GPS de $x(t)$ à certains instants t_i
- **Erreurs** : Incertitude GPS, modèle imparfait (frottements...)
- Trouver un **compromis**



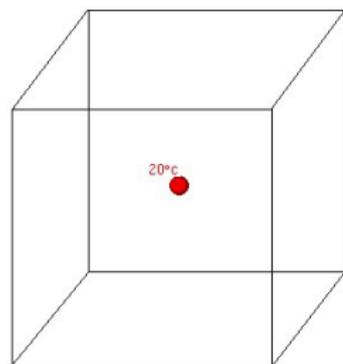
Exemple : diffusion de la chaleur

- **Variable physique** : $u(x, t)$ température d'une pièce Ω au temps t
- Conditions initiales
 - Température homogène $u(., 0) = 15^\circ$



Exemple : diffusion de la chaleur

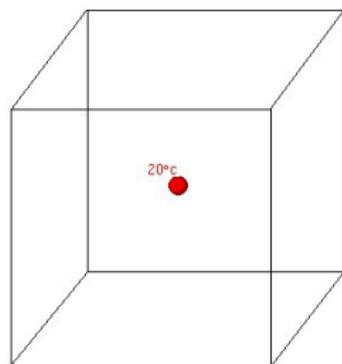
- **Variable physique** : $u(x, t)$ température d'une pièce Ω au temps t
- Conditions initiales
 - Température homogène $u(., 0) = 15^\circ$
 - Ajout d'un radiateur à la position x_R : $u(x_R, 0) = 20^\circ$



Exemple : diffusion de la chaleur

- **Modèle dynamique** : Équation de la chaleur

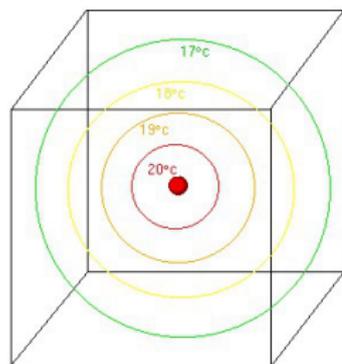
$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) & x \in \Omega \setminus x_R \\ u(x_R, t) = 20^\circ & \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$



Exemple : diffusion de la chaleur

- **Modèle dynamique** : Équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) & x \in \Omega \setminus x_R \\ u(x_R, t) = 20^\circ & \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

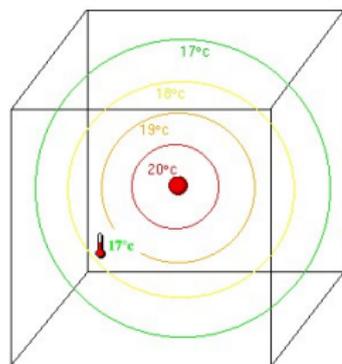


Exemple : diffusion de la chaleur

- **Modèle dynamique** : Équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) & x \in \Omega \setminus x_R \\ u(x_R, t) = 20^\circ & \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- **Observations** : Mesure thermomètre T : $17^\circ \neq u(x_T, 3)$

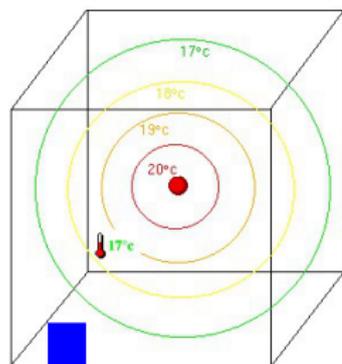


Exemple : diffusion de la chaleur

- **Modèle dynamique** : Équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) & x \in \Omega \setminus x_R \\ u(x_R, t) = 20^\circ & \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- **Observations** : Mesure thermomètre $T : 17^\circ \neq u(x_T, 3)$
- **Incertitudes** sur les conditions au bord g (ventilation...)

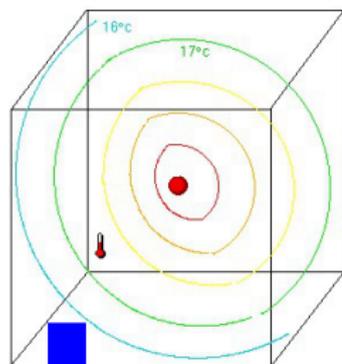


Exemple : diffusion de la chaleur

- **Modèle dynamique** : Équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) & x \in \Omega \setminus x_R \\ u(x_R, t) = 20^\circ & \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- **Observations** : Mesure thermomètre $T : 17^\circ \neq u(x_T, 3)$
- **Incertitudes** sur les conditions au bord g (ventilation...)
- Correction des conditions aux bords g par rapport à la mesure



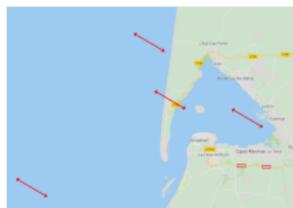
- Apprentissage de g
- Meilleure connaissance de l'état au temps t
- Prédiction plus fiable pour le futur

Prédiction en océanographie

- **Variables** : vitesse, température, salinité, phytoplancton...
- **Modèle numérique** de dynamique de l'océan : Navier-Stokes

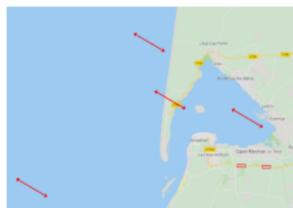
Prédiction en océanographie

- **Variables** : vitesse, température, salinité, phytoplancton...
- **Modèle numérique** de dynamique de l'océan : Navier-Stokes
- Interactions spatiales **non homogènes**



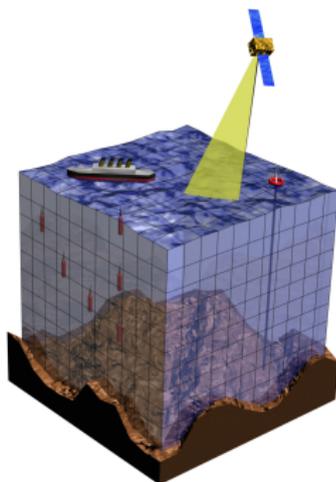
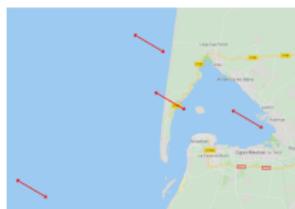
Prédiction en océanographie

- **Variables** : vitesse, température, salinité, phytoplancton...
- **Modèle numérique** de dynamique de l'océan : Navier-Stokes
- Interactions spatiales **non homogènes**
- Conditions aux bords **complexes**
 - littoral
 - fond marin
 - atmosphère

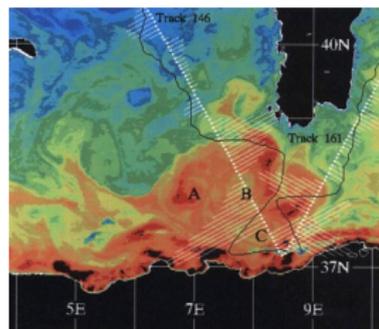


Prédiction en océanographie

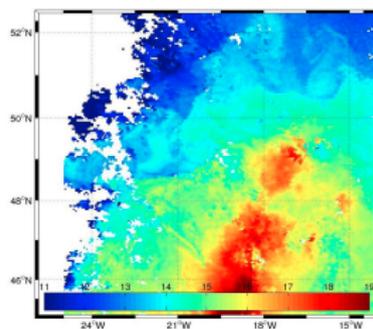
- **Variables** : vitesse, température, salinité, phytoplancton...
- **Modèle numérique** de dynamique de l'océan : Navier-Stokes
- Interactions spatiales **non homogènes**
- Conditions aux bords **complexes**
 - littoral
 - fond marin
 - atmosphère
- **Observations**
 - batymétrie/sondes
 - dériveurs/bouées
 - données satellites



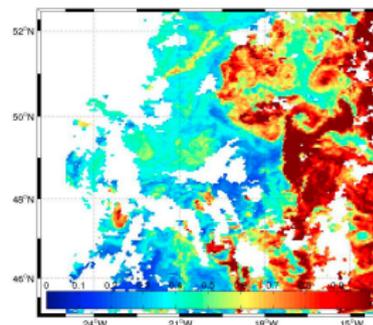
Observations satellitaires



Altimétrie



Température

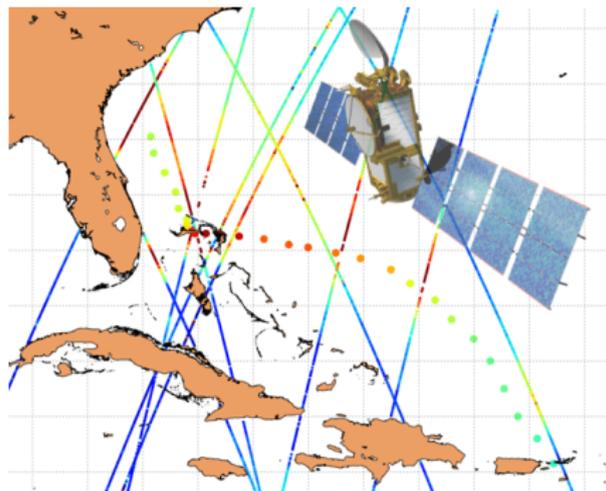


Chlorophylle

Observation de l'océan

Satellite Jason

Résolution $\approx 10\text{km}$

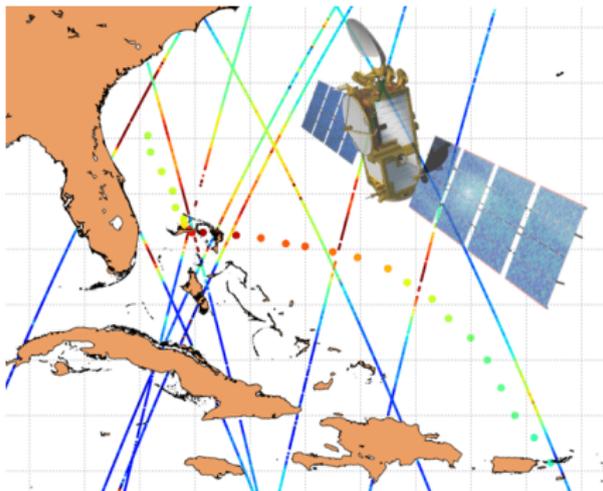


(CNES/NASA, 2001-)

Observation de l'océan

Satellite Jason

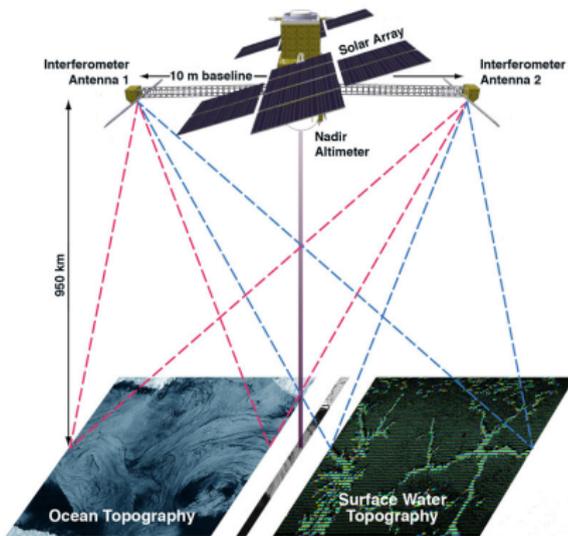
Résolution $\approx 10\text{km}$



(CNES/NASA, 2001-)

Nouveau satellite SWOT

Haute résolution $\approx 1\text{km}$



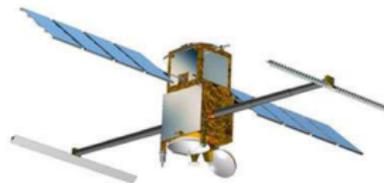
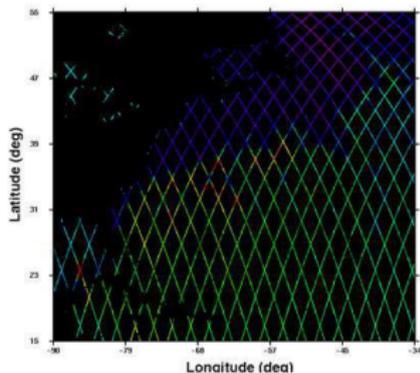
(CNES/NASA, 2021-)

Image de l'océan

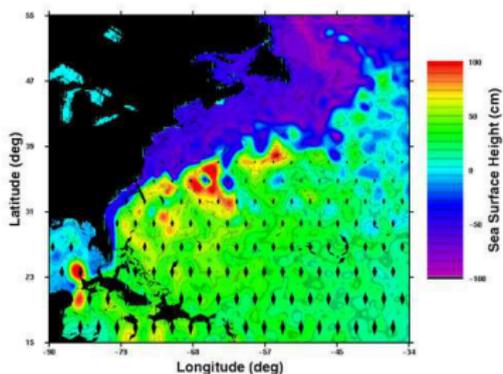
couverture du globe



Altimètre Nadir classique



Altimètre à fauchée



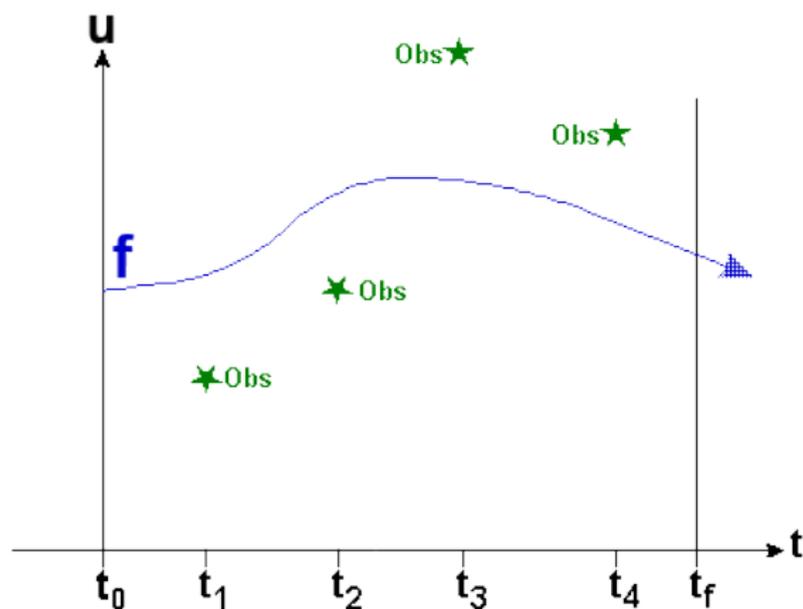
Assimilation de données

Minimisation sous contrainte

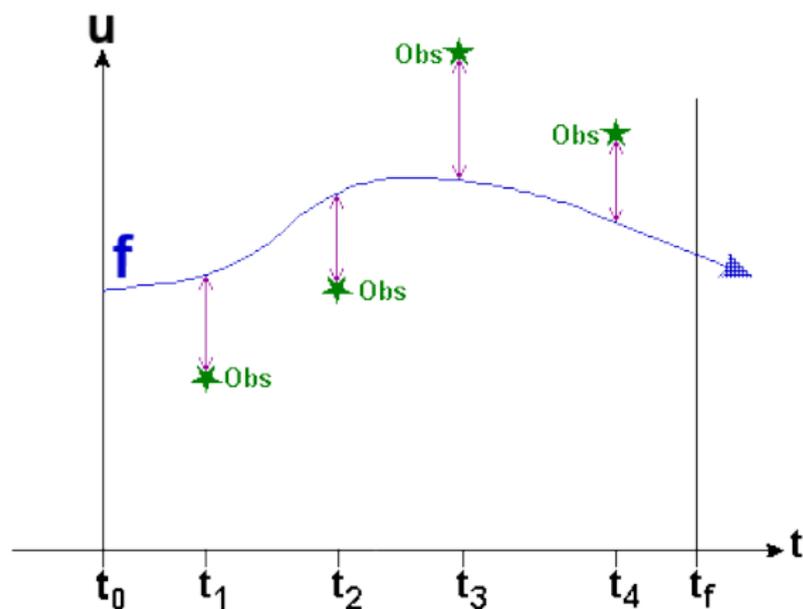
$$\min_{\partial_t u = \mathbf{M}(u)} \int_T \|y(t) - \mathbf{H}(u(t))\|_R^2 dt + \|u(t_0) - f\|_B^2$$

- **Variable physiques** u : vitesse, température, pression...
- **Modèle dynamique** $\partial_t u = \mathbf{M}(u)$: évolution temporelle du système
- Connaissance a priori de l'état du système au temps t_0 : $u(t_0) \approx f$
- **Observations** y : capteurs, stations, ballons...
- Opérateur d'observation \mathbf{H}
- Choix d'une **norme** $\|\cdot\|$
- Modélisation de matrices de covariances des **erreurs** sur l'état du système B et les observations R

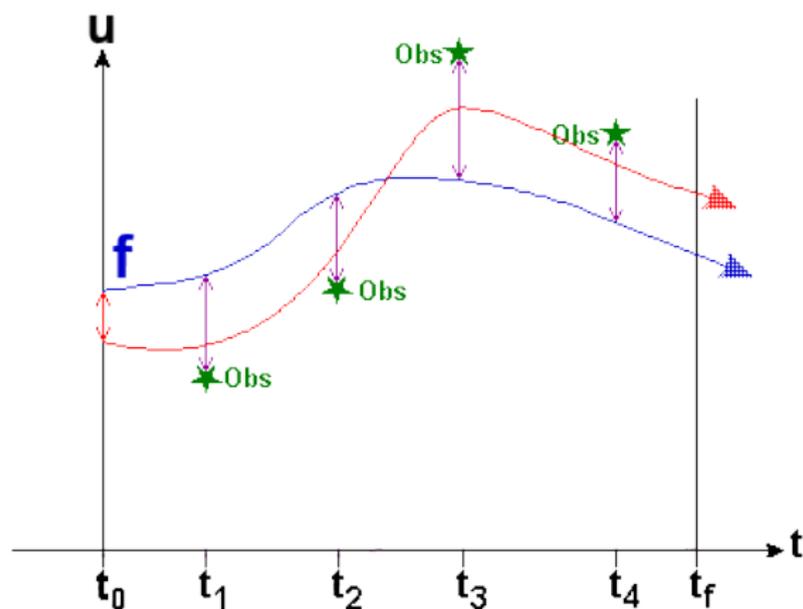
Assimilation de données



Assimilation de données

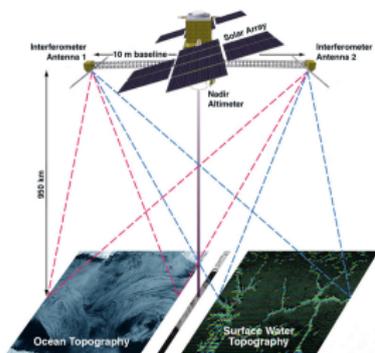


Assimilation de données



Assimilation d'images de l'océan

Images satellite y

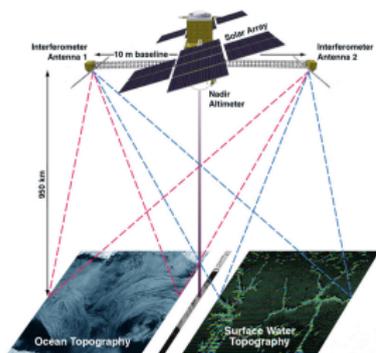


Assimilation

$$\|y - \mathbf{H}(u)\|_R^2$$

Assimilation d'images de l'océan

Images satellite y



Difficultés

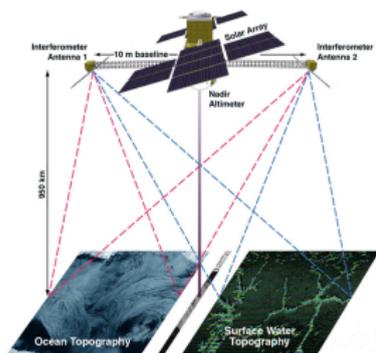
- Quantités observées parfois absentes du modèle : Opérateur d'observation \mathbf{H} ?

Assimilation

$$\|y - \mathbf{H}(u)\|_R^2$$

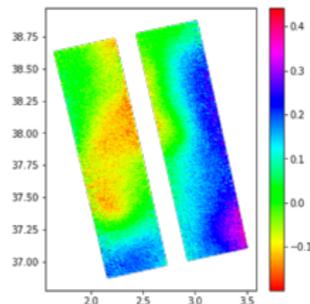
Assimilation d'images de l'océan

Images satellite y



Difficultés

- Quantités observées parfois absentes du modèle : Opérateur d'observation \mathbf{H} ?
- Erreurs R : dilatation des capteurs, roulis du satellite, conditions atmosphériques...



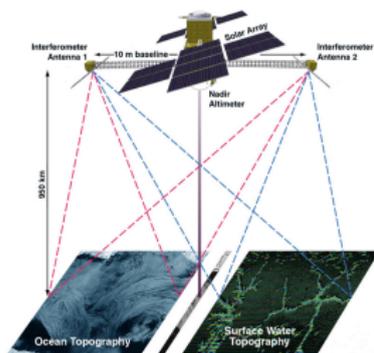
Assimilation

$$\|y - \mathbf{H}(u)\|_R^2$$

Image bruitée y

Assimilation d'images de l'océan

Images satellite y



Difficultés

- Quantités observées parfois absentes du modèle : Opérateur d'observation \mathbf{H} ?
- Erreurs R : dilatation des capteurs, roulis du satellite, conditions atmosphériques...

Assimilation

$$\|y - \mathbf{H}(u)\|_R^2$$

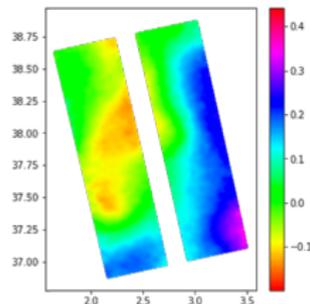
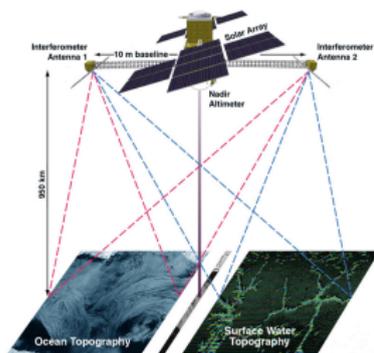


Image débruitée y

Assimilation d'images de l'océan

Images satellite y



Difficultés

- Quantités observées parfois absentes du modèle : Opérateur d'observation \mathbf{H} ?
- Erreurs R : dilatation des capteurs, roulis du satellite, conditions atmosphériques...

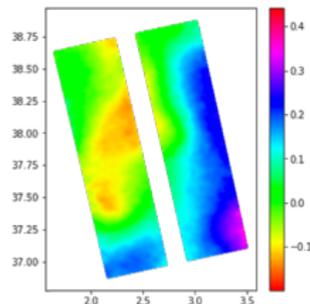


Image débruitée y

Assimilation

$$\|y - \mathbf{H}(u)\|_R^2$$

- Choix de la **norme** pour comparer des images

Norme pour l'assimilation

- Détermine le **compromis** entre prédiction p et observation y :

$$\min_u \|u - p\|_B^2 + \|u - y\|_R^2$$

Norme pour l'assimilation

- Détermine le **compromis** entre prédiction p et observation y :

$$\min_u \|u - p\|_B^2 + \|u - y\|_R^2$$

- Choix naturel : distance Euclidienne pondérée par une matrice s.d.p

$$\|x\|_A^2 = \langle x, Ax \rangle$$

Norme pour l'assimilation

- Détermine le **compromis** entre prédiction p et observation y :

$$\min_u \|u - p\|_B^2 + \|u - y\|_R^2$$

- Choix naturel : distance Euclidienne pondérée par une matrice s.d.p

$$\|x\|_A^2 = \langle x, Ax \rangle$$

- Pour un degré de confiance $\alpha \in [0; 1]$, $B = \alpha \text{Id}$ et $R = (1 - \alpha) \text{Id}$:

$$\min_u \alpha \|u - p\|^2 + (1 - \alpha) \|u - y\|^2$$

Norme pour l'assimilation

- Détermine le **compromis** entre prédiction p et observation y :

$$\min_u \|u - p\|_B^2 + \|u - y\|_R^2$$

- Choix naturel : distance Euclidienne pondérée par une matrice s.d.p

$$\|x\|_A^2 = \langle x, Ax \rangle$$

- Pour un degré de confiance $\alpha \in [0; 1]$, $B = \alpha \text{Id}$ et $R = (1 - \alpha) \text{Id}$:

$$\min_u \alpha \|u - p\|^2 + (1 - \alpha) \|u - y\|^2$$

- Solution : interpolation

$$u^* = \alpha p + (1 - \alpha)y$$

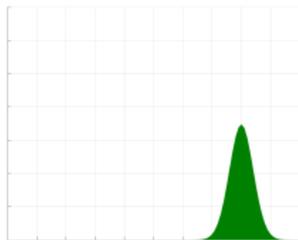
- On prédit $p = 18^\circ$, on observe $y = 17^\circ$
- L'assimilation doit retourner un résultat dans l'intervalle $[17^\circ, 18^\circ]$

Distance Euclidienne

- Donnée définie sur un domaine 1D



Prédiction



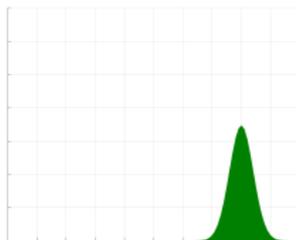
Observation

Distance Euclidienne

- Donnée définie sur un domaine 1D



Prédiction



Observation

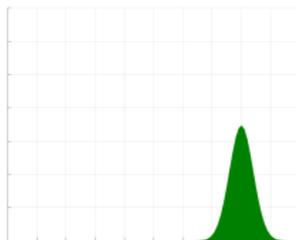
Interpolation

Distance Euclidienne

- Donnée définie sur un domaine 1D



Prédiction



Observation

Interpolation

- Interpolation \rightarrow calcul de géodésique dans l'espace Euclidien

Distance Euclidienne

- Donnée définie sur un domaine 1D



Prédiction



Observation

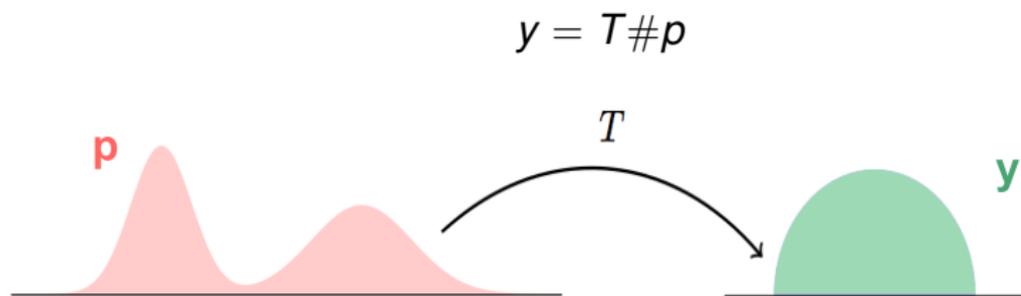
Interpolation

- Interpolation \rightarrow calcul de géodésique dans l'espace Euclidien
- Pas adapté aux erreurs de positions des structures

Distance de Wasserstein

Transport optimal (cf. Soirée IMB précédente) :

- Transport T : application transférant une masse p vers une masse observée y , définies pour $x \in \Omega$:



- Transport optimal : Application de coût $\int_{\Omega} \|x - T(x)\|^2 dx$ minimal
- Interpolation Wasserstein pour $\alpha \in [0; 1]$

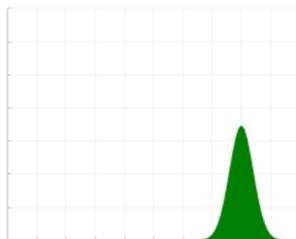
$$u = (\text{Id} + \alpha T)\#p$$

Distance de Wasserstein

- Donnée définie sur un domaine 1D



Prédiction



Observation

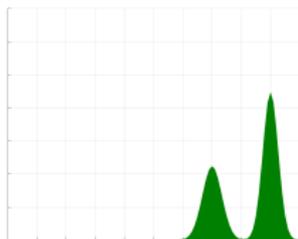
Interpolation

Distance de Wasserstein

- Donnée définie sur un domaine 1D



Prédiction

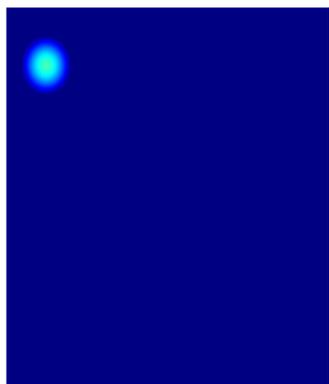


Observation

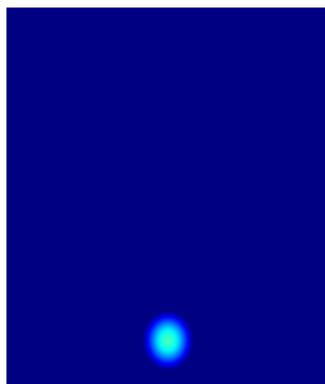
Interpolation

Distance de Wasserstein

Polluant sur un domaine 2D



Prédiction



Observation

Interpolation

Distance de Wasserstein généralisée

Polluant sur un domaine 2D avec obstacles



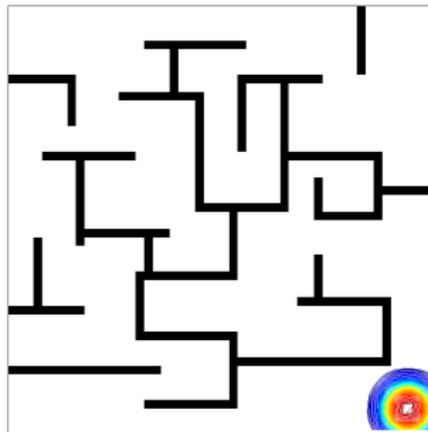
Prédiction



Observation

Interpolation

Distance de Wasserstein généralisée



Conclusions et challenges pour le futur

- Images satellite de l'océan (programme SWOT, 2021)
 - ✓ Observation de phénomènes physiques de "petite" échelle
 - ✗ Modélisation des erreurs de mesure

- Distance de Wasserstein
 - ✓ Bonne distance entre images
 - ✗ Cadre trop strict : préservation de la masse, données positives