DM "de Pâques"
Une équation polynomiale

Exercice 1 ●○○ — Le DM est court et assez facile. Consigne : en profiter pour s'assurer que la rédaction est parfaite

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$

   Idée : Puisqu'on n'a pas de contrainte sur le degré des éléments de F, il vaut mieux éviter d'introduire les coefficients des polynômes. On peut plutôt montrer la stabilité par combinaison linéaire.

2. Montrer que $F \neq \{0\}$.

3. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

   Idée : La question se règle en une ligne : comment écrire l'ensemble G grâce à l'ensemble F ?

4. En cherchant des relations sur les coefficients de $P \in G$, donner une base de G. En déduire la dimension de G.

5. En "complétant" la base de G en une base de $\mathbb{R}_3[X]$, proposer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}_3[X]$. Quelle est la dimension de ce supplémentaire ?

6. (Plus dur, pour ceux qui veulent creuser)

   a. Soit $P \in F$, que l'on écrit
   $$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$
   avec n son degré. Quelles relations obtient-on sur les coefficients de $P \in F$? Vous sentez-vous capable de résoudre ce système ?

   b. Comment traduire géométriquement l'équation $P(X+1) = P(1-X)$ sur la fonction associée au polynôme P ? Dans quelle base de $\mathbb{R}[X]$ écrire le polynôme P pour obtenir des relations simples sur ses coefficients (dans cette base) ?

   c. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, en déduire une base de $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$, et sa dimension.