DM "de Pâques"
Une équation polynomiale

Exercice 1 ●○○ Le DM est court et assez facile. Consigne : en profiter pour s'assurer que la rédaction est parfaite

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que $F \neq \{0\}$.
3. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   <u>**Idée**</u> : La question se règle en une ligne : comment écrire l'ensemble G grâce à l'ensemble F ?
4. En cherchant des relations sur les coefficients de $P \in G$, donner une base de G. En déduire la dimension de G.
5. En "complétant" la base de G en une base de $\mathbb{R}_3[X]$, proposer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}_3[X]$. Quelle est la dimension de ce supplémentaire ?
6. (Plus dur, pour ceux qui veulent creuser)
   a. Soit $P \in F$, que l'on écrit
   $$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$
   avec n son degré. Quelles relations obtient-on sur les coefficients de $P \in F$? Vous sentez-vous capable de résoudre ce système ?
   b. Comment traduire géométriquement l'équation $P(X+1) = P(1-X)$ sur la fonction associée au polynôme P ? Dans quelle base de $\mathbb{R}[X]$ écrire le polynôme P pour obtenir des relations simples sur ses coefficients (dans cette base) ?
   c. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, en déduire une base de $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$, et sa dimension.

<u>**Correction**</u> :

1.
- Il est clair que le polynôme nul vérifie cette égalité.
- Montrons la stabilité de F par combinaison linéaire. Soient P et Q dans F, ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a
$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q)(X+1) &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1)\\ &= \lambda P(1-X) + \mu Q(1-X) \quad \text{car } P \in F \text{ et } Q \in F\\ &= (\lambda P + \mu Q)(1-X).\end{aligned}$$
  cela prouve que $(\lambda P + \mu Q) \in F$.

Ces deux points montrent que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2. Les polynômes constants sont dans F, cela prouve que $F \neq \{0\}$.

3. On a $G = F \cap \mathbb{R}_3[X]$. Or l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel. Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

4. Soit $P \in G$, que l'on écrit
$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$
On calcule séparément :
$$\begin{aligned}P(X+1) &= a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d\\ &= a(X^3+3X^2+3X+1) + b(X^2+2X+1) + c(X+1) + d\\ &= aX^3 + (3a+b)X^2 + (3a+2b+c)X + a+b+c+d\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}P(1-X) =& a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d\\ &= a(-X^3+3X^2-3X+1) + b(X^2-2X+1) + c(1-X) + d\\ &= -aX^3 + (3a+b)X^2 + (-3a-2b-c)X + a+b+c+d\end{aligned}$$
On a alors
$$\begin{aligned}&P(X+1) = P(1-X)\\ \iff &\left\{\begin{array}{rcl} a &=& -a\\ 3a+b &=& 3a+b\\ 3a+2b+c &=& -3a-2b-c\\ a+b+c+d &=& a+b+c+d\end{array}\right. \quad \text{(par identification des coefficients)}\\ &\iff \quad a = 0 \ \text{ et } \ c = -2b.\end{aligned}$$
Ainsi
$$F = \left\{bX^2 - 2bX + d \mid b,d \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\left(X^2-2X\right) + d \mid b,d \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(1, X^2-2X\right)$$
la famille $\left(1, X^2-2X\right)$ engendre donc F, or elle est libre (vecteurs non colinéaires) et est donc une base de F.
On a trouvé une base de G formée de deux éléments, d'où $\dim(G) = 2$.

5. Complétons cette base de G en une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On a la chance d'avoir la famille $\left(1, X^2-2X\right)$ qui est déjà échelonnée. Ainsi, la famille $\left(1, X^2-2X, X, X^3\right)$ est libre car échelonnée (quitte à la réordonner). De plus $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4. Puisque cette famille possède quatre éléments et qu'elle est libre, c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
On pose alors

$$H = \mathrm{Vect}(X, X^3).$$

C'est un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}_3[X]$.

6. **a.** On reprend le calcul de $P(X+1)$ et $P(1-X)$. On utilise d'abord le binôme de Newton :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} X^p = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k} a_k \binom{k}{p} X^p.$$

En vue de trouver les coefficients de ce polynômes, on permute les sommes, en utilisant que la somme a lieu sur les indices $0 \leqslant p \leqslant k \leqslant n$:

$$P(X+1) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=p}^{n} a_k \binom{k}{p} X^p.$$

Ainsi $P(X+1)$ a pour coefficient de degré p le nombre $\sum_{k=p}^{n} a_k \binom{k}{p}$.
Un calcul analogue fournit :

$$P(-X+1) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=p}^{n} (-1)^p a_k \binom{k}{p} X^p.$$

Ainsi $P(1-X)$ a pour coefficient de degré p le nombre $(-1)^p \sum_{k=p}^{n} a_k \binom{k}{p}$.
On a donc

$$P(X+1) = P(1-X) \iff \forall p \in [\![0\,,n]\!]\,, \quad \sum_{k=p}^{n} a_k \binom{k}{p} = (-1)^p \sum_{k=p}^{n} a_k \binom{k}{p}.$$

Ces $n+1$ équations se simplifient : si p est pair, elles sont vérifiées, tandis que si p est impair, on trouve $\sum_{k=p}^{n} a_k \binom{k}{p} = 0$.
Pour $n \geqslant 1$, il y a $m_n = E(\frac{n}{2}) + 1$ nombres impairs entre 0 et n. Ansi, les coefficients $(a_k)_{k=0,\dots,n}$ vérifie un système de m_n équations à $n+1$ inconnus. Il n'est pas clair comment résoudre ce système, même si on peut remarquer qu'il est échelonné.

b. La valeur 1 est un point de symétrie pour le polynôme P. Le graphe de la fonction associée a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$.

Ces considérations nous invitent à écrire la formule de Taylor de P en 1, c'est-à-dire à écrire P dans la base $(1, (X-1), \dots, (X-1)^n)$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k (X-1)^k \quad \text{avec } b_k = \frac{P^{(k)}(1)}{k!}.$$

On a alors

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \quad \text{et} \quad P(1-X) = \sum_{k=0}^{n} b_k (-X)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k X^k.$$

Ainsi, par identification des coefficients,

$$\begin{aligned} P(X+1) = P(1-X) &\iff \forall k \in [\![0\,,n]\!]\,, \quad b_k = (-1)^k b_k. \\ &\iff \text{pour tout } k \in [\![0\,,n]\!] \text{ impair}, \ b_k = 0. \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des nombres pairs entre 0 et n. On a donc montré que

$$P(X+1) = P(1-X) \iff P = \sum_{k \in \mathcal{P}_n} b_k (X-1)^k.$$

c. D'après ce qui précède, la famille $((X-1)^k)_{k \in \mathcal{P}_n}$ (qui est bien libre) est une base de $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$. Cet espace vectoriel est donc de dimension $E(\frac{n}{2}) + 1$ (le nombre d'éléments dans $\mathcal{P}_n$).
Histoire d'y voir clair, donnons un exemple : si $n = 7$, une base de $\{P \in \mathbb{R}_7[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$ est $(1, (X-1)^2, (X-1)^4, (X-1)^6)$. Cet espace vectoriel est donc de dimension 4.