DM de vacances de février
Matrices et DL.

Exercice 1 ●○○ — Un système 2*2 et une matrice inverse

Etant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, résoudre le système suivant (on discutera selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} mx + y = a \\ x + my = b \end{cases}$$

En déduire pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice $M = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ est inversible, et le cas échéant, donner son inverse.

Exercice 2 ●○○ — Inverser une matrice Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse, avec la méthode de votre choix.

Exercice 3 ●●○ — Un outil pour les suites récurrentes linéaires (TD 13 exo 23) On considère la suite récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \\ u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Rappeler la méthode vue dans le chapitre sur les suites et donner l'expression générale de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.
2. Le but dans les questions suivantes est de retrouver l'expression de (u_n) par un calcul de puissance de matrice. En particulier, on évitera de se servir de la **question 1**.
   - **a.** Ecrire X_{n+1} en fonction de u_n et u_{n+1}, puis déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
   - **b.** En déduire X_n en fonction de A^n et X_0.
   - **c.** Montrer par récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{n+1} \cos(\frac{n+1}{4}\pi) & \sqrt{2}^n \sin(\frac{n}{4}\pi) \\ \sqrt{2}^{n+2} \cos(\frac{n+2}{4}\pi) & \sqrt{2}^{n+1} \sin(\frac{n+1}{4}\pi) \end{pmatrix}.$$
   On pourra montrer que $\cos(\frac{n+3}{4}\pi) = -\sin(\frac{n+1}{4}\pi)$ (ainsi qu'une formule similaire pour $\sin(\frac{n+3}{4}\pi)$) et utiliser les formules d'addition .
   - **d.** Retrouver l'expression explicite de (u_n).

Exercice 4 ●○○ — DL à l'ordre 1 (TD 14 exo 1.2) Donner le DL à l'ordre 1 de $x \mapsto \mathrm{Arctan}(1 + x)$ en 0. En déduire un équivalent de $x \mapsto \mathrm{Arctan}(1 + x) - \frac{\pi}{4}$ en 0.

Exercice 5 ●○○ — Un équivalent pour une puissance (TD 14 exo 2.2)

1. Rappeler un équivalent simple de $e^u - 1$ lorsque $u \to 0$.
2. En déduire un équivalent simple de $x^{\frac{1}{x}} - 1$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 6 ●○○ — DL d'un inverse (TD 14 exo 7.1) Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ en 0.

Exercice 7 ●●○ — Une étude locale (vue en PTSI1) On souhaite définir la fonction

$$f : x \mapsto \frac{e^{2x} - \cos x - 2\sin x + 5\ln(1 - x) + 5x}{\mathrm{ch}\, x - \sqrt{1 + x^2}}.$$

1. On donne le DL suivant :
$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$
En utilisant des DL, donner un équivalent de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}\, x - \sqrt{1 + x^2}$ en 0, et en déduire que celle-ci ne s'annule pas dans un voisinage de 0 (sauf en 0).
2. En déduire que f est bien définie dans un voisinage de 0, sauf peut-être en 0.
3. Montrer que f admet un DL à l'ordre 1, en 0.
4. En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable, et donner la valeur de la dérivée en 0.