DM de vacances de février
Matrices et DL.

Exercice 1 •◦◦ — Un système 2*2 et une matrice inverse

On permute les deux lignes, et on applique le pivot de Gauss (qui ne comporte ici qu'une seule étape) :

$$\begin{cases} x+my=b \\ mx+y=a \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1}{\iff} \begin{cases} x+my=b \\ (1-m^2)y=a-mb \end{cases}$$

On doit distinguer selon que $1-m^2=0$ ou $1-m^2\neq 0$, c'est-à-dire selon que $m\in\{-1,1\}$ ou pas :

- $m\notin\{-1,1\}$. On a alors $y=\frac{a-mb}{1-m^2}$ puis $x=b-my=\frac{b-ma}{1-m^2}$. Ainsi, le système a une unique solution : le couple $(\frac{b-ma}{1-m^2},\frac{a-mb}{1-m^2})$.
- $m=1$. Le système devient $\begin{cases} x+y=a \\ x+y=b \end{cases}$. On distingue alors deux cas :
  - ⋆ Si $a\neq b$, le système est incompatible et n'a pas de solution.
  - ⋆ Si $a=b$, les deux lignes sont égales, et le système a une infinité de solutions : $\mathcal{S}=\{(x,-x+a),x\in\mathbb{R}\}$. Cet ensemble coïncide avec la droite de coefficient directeur -1 qui passe par le point $(0,a)$.
- $m=-1$. Le système devient $\begin{cases} -x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$. On distingue alors deux cas :
  - ⋆ Si $a\neq -b$, le système est incompatible et n'a pas de solution.
  - ⋆ Si $a=-b$, les deux lignes sont égales, et le système a une infinité de solutions : $\mathcal{S}=\{(x,x+a),x\in\mathbb{R}\}$. Cet ensemble coïncide avec la droite de coefficient directeur 1 qui passe par le point $(0,a)$.

On sait que la matrice M est inversible si et seulement si pour toute colonne $B=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, le système $MX=B$ a une unique solution, qui est alors $M^{-1}B$. D'après l'analyse précédente, c'est le cas si et seulement si $m\notin\{-1,1\}$, et la solution est alors

$$X=\begin{pmatrix}\frac{b-ma}{1-m^2}\\ \frac{a-mb}{1-m^2}\end{pmatrix}=\frac{1}{m^2-1}\begin{pmatrix}ma-b\\ mb-a\end{pmatrix}.$$

On déduit que M est inversible si et seulement $m\notin\{-1,1\}$, et la matrice inverse se déduit des solutions du système :

$$M^{-1}=\frac{1}{m^2-1}\begin{pmatrix}m & -1\\ -1 & m\end{pmatrix}$$

Exercice 2 •◦◦ — Inverser une matrice

Après inversion selon une des méthodes du cours, on trouve

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}24 & -4 & -5\\ 8 & -1 & -2\\ -13 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Voici les détails, par exemple par un algorithme de Gauss-Jordan sur la matrice A, augmentée de la matrice I_3 sur laquelle nous répercutons les étapes de l'algorithme transformant A en I_3 :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_3\end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&7&8&0&1&0\\3&4&8&0&0&1\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_2-3L_1}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&3&2&-2&1&0\\0&-2&-1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+\frac{2}{3}L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&3&2&-2&1&0\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{13}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)$$

On effectue alors un deuxième algorithme du pivot en partant du bas :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&3&2&-2&1&0\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{13}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-6L_3\\ L_1\leftarrow L_1-9L_3}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&40&-6&-9\\0&3&0&24&-3&-6\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{13}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-\frac{2}{3}L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&24&-4&-5\\0&3&0&24&-3&-6\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{13}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)$$

On conclut en effectuant des dilatation sur les lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&24&-4&-5\\0&3&0&24&-3&-6\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{13}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftrightarrow\frac{1}{3}L_2\\ L_3\leftrightarrow 3L_1}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&24&-4&-5\\0&1&0&8&-1&-2\\0&0&1&-13&2&3\end{array}\right).$$

On déduit la valeur de A^{-1} annoncée.

Exercice 3 ●●○ — Un outil pour les suites récurrentes linéaires (TD 13 exo 23)

1. On associe à la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ l'équation caractéristique

$$r^2 = 2r - 2 \iff r^2 - 2r + 2 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = -4$, on a donc deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad r_2 = 1 + i.$$

La suite (u_n) vérifie alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Si on veut une expression réelle, on met les racines de l'équation caractéristique sous forme exponentielle :

$$r_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

et on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\lambda \cos(\frac{n\pi}{4}) + \mu \sin(\frac{n\pi}{4}\right) \sqrt{2}^n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Afin de trouver les valeurs des deux constantes, on utilise les conditions initiales :

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ (\lambda \cos \frac{\pi}{4} + \mu \sin \frac{\pi}{4})\sqrt{2} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Ainsi on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\cos(\frac{n\pi}{4}) + \sin(\frac{n\pi}{4}\right) \sqrt{2}^n.$$

2. Le but dans les questions suivantes est de retrouver l'expression de (u_n) par un calcul de puissance de matrice. En particulier, on évitera de se servir de la **question 1**.

a. On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 2u_{n+1} - 2u_n \end{pmatrix}$. Après lecture des combinaisons linéaires intervenant dans X_{n+1}, on introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. On a alors $X_{n+1} = AX_n$.

b. Par une récurrence directe, on a

$$X_n = A^n X_0.$$

c. On montre la propriété par récurrence.

- Initialisation. Pour $n = 0$, la formule proposée donne

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(0) \\ 2\cos(\frac{\pi}{2}) & \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = I_2 = A^0,$$

et l'initialisation est bien vérifiée.

- Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{n+1}\cos(\frac{n+1}{4}\pi) & \sqrt{2}^n\sin(\frac{n}{4}\pi) \\ \sqrt{2}^{n+2}\cos(\frac{n+2}{4}\pi) & \sqrt{2}^{n+1}\sin(\frac{n+1}{4}\pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{n+2}\cos(\frac{n+2}{4}\pi) & \sqrt{2}^{n+1}\sin(\frac{n+1}{4}\pi) \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Où par soucis de lecture, les coefficients de la deuxième ligne sont donnés séparément par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{2}^{n+1}\left(-2\cos(\frac{n+1}{4}\pi) + 2\sqrt{2}\cos(\frac{n+2}{4}\pi)\right) \\ y_{n+1} = \sqrt{2}^{n}\left(-2\sin(\frac{n}{4}\pi) + 2\sqrt{2}\sin(\frac{n+1}{4}\pi)\right) \end{cases}$$

Les coefficients de la première ligne sont ceux attendus, il reste à travailler sur les expressions des coefficients de la deuxième ligne. Commençons par faire apparaître la bonne puissance de $\sqrt{2}$ en mettant 2 en facteur :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{2}^{n+3}\left(-\cos(\frac{n+1}{4}\pi) + \sqrt{2}\cos(\frac{n+2}{4}\pi)\right) \\ y_{n+1} = \sqrt{2}^{n+2}\left(-\sin(\frac{n}{4}\pi) + \sqrt{2}\sin(\frac{n+1}{4}\pi)\right) \end{cases}$$

Or on a avec les formules d'addition

$$\cos(\frac{n+2}{4}\pi) = \cos(\frac{n+1}{4}\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{n+1}{4}\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{n+1}{4}\pi)$$

et donc

$$\sqrt{2}\cos(\frac{n+2}{4}\pi) = \cos(\frac{n+1}{4}\pi) - \sin(\frac{n+1}{4}\pi)$$

On déduit que

$$-\cos(\frac{n+1}{4}\pi) + \sqrt{2}\cos(\frac{n+2}{4}\pi) = -\sin(\frac{n+1}{4}\pi)$$

et finalement, avec la formule $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$:

$$-\sin(\frac{n+1}{4}\pi) = \cos(\frac{n+1}{4}\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{n+3}{4}\pi).$$

On obtient que $x_{n+1} = \sqrt{2}^{n+3}\cos(\frac{n+3}{4}\pi)$, ce qui est bien la valeur attendue pour que la propriété soit héréditaire. Par des calculs similaires (le mécanisme est le même en remplçant cos par sin dans la plupart des formules), on obtient $y_{n+1} = \sqrt{2}^{n+2}\sin(\frac{n+2}{4}\pi)$. On obtient au final :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{n+2}\cos(\frac{n+2}{4}\pi) & \sqrt{2}^{n+1}\sin(\frac{n+1}{4}\pi) \\ \sqrt{2}^{n+3}\cos(\frac{n+3}{4}\pi) & \sqrt{2}^{n+2}\sin(\frac{n+2}{4}\pi) \end{pmatrix},$$

et l'hérédité est prouvée.

On déduit la propriété annoncée par principe de récurrence.

d. On déduit des questions précédentes que

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{n+1}\cos(\frac{n+1}{4}\pi) & \sqrt{2}^{n}\sin(\frac{n}{4}\pi) \\ \sqrt{2}^{n+2}\cos(\frac{n+2}{4}\pi) & \sqrt{2}^{n+1}\sin(\frac{n+1}{4}\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En prenant la première ligne de cette relation, on retrouve

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{2}^{n+1}\cos(\frac{n+1}{4}\pi) + 2\sqrt{2}^{n}\sin(\frac{n}{4}\pi) \\ &= \sqrt{2}^{n}\left(\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{n}{4}\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{n}{4}\pi) + 2\sin(\frac{n}{4}\pi)\right) \\ &= \sqrt{2}^{n}\left(\cos(\frac{n}{4}\pi) + \sin(\frac{n}{4}\pi)\right) \end{aligned}$$

On retrouve la valeur trouvée avec la méthode utilisant l'équation caractéristique.

Exercice 4 •○○ DL à l'ordre 1 (TD 14 exo 1.2) On pose $f(x) = \text{Arctan}(x+1)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut donc écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x).$$

On a $f(0) = \frac{\pi^2}{4}$. De plus, par dérivée d'une composée on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2},$$

et donc $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, on a

$$f(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{x}{2} + o(x).$$

On déduit que

$$f(x) - \frac{\pi}{4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

Exercice 5 •○○ Un équivalent pour une puissance (TD 14 exo 2.2)

1. On a $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$.

2. On passe sous forme exponentielle en écrivant $x^{\frac{1}{x}} - 1 = e^{\frac{\ln x}{x}} - 1$. Or $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x} = 0$. Ainsi on peut appliquer l'équivalent de la question précédente avec $u = \frac{\ln x}{x}$:

$$x^{\frac{1}{x}} - 1 = e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

Exercice 6 •○○ DL d'un inverse (TD 14 exo 7.1) On commence par faire le DL du dénominateur en 0 à l'ordre 3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et donc

$$1 + e^x = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Puisque cette fonction ne s'annule pas en 0, on peut faire le développement limité de l'inverse, en mettant en facteur le coefficient dominant :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)}.$$

Or on a le développement limité suivant :

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3).$$

Ainsi, on pose $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) = x\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)$. Avant de se lancer, on forme les développements limités de u^2 et u^3 en fonction de x, en gardant en tête qu'on arrête les développements limités à l'ordre 3 : :

$$u^2 = x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)^2 = x^2\left(\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{2}\times\frac{x}{4} + o(x)\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

et

$$u^3 = x^3\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)^3 = x^3(\frac{1}{8} + o(1)) = \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

Par ailleurs, puisque $u \underset{\sim x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, on a pour une fonction g quelconque :

$$g = o(u^3) \iff g = o(x^3).$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+o(u^3) \underset{x\to 0}{=} 1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12})+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{24}+o(x^3).$$

Remarquez que tous les termes de reste ont été regroupés en un seul. Finalement :

$$\frac{1}{1+e^x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{48}+o(x^3).$$

Exercice 7 ●●○ — Une étude locale (vue en PTSI1)

1. On a, en 0, le déveoppement suivant :

$$\mathrm{ch}(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4).$$

Par composition de DL, on a également en 0 :

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

Ainsi on a, en 0 :

$$\mathrm{ch}\,x-\sqrt{1+x^2}=\frac{x^4}{6}+o(x^4)=x^4(\frac{1}{6}+o(1)).$$

Ainsi il existe un voisinage de 0, noté $\mathcal{V}$, telle que

$$\forall x\in\mathcal{V}\backslash\{0\},\quad \mathrm{ch}\,x-\sqrt{1+x^2}\neq 0,$$

de plus, celle fonction reste du signe de $\frac{1}{6}$ sur $\mathcal{V}$, donc positive.

2. La fonction f est bien définie sur $\mathcal{V}\backslash\{0\}$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

3. On a déjà le DL du dénominateur en 0, avec un coefficent dominant de degré 4. On va donc faire un DL du numérateur, qui est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}$ et admet donc un DL à n'importe quel ordre en 0. Pour connaître l'ordre du DL à effectuer, on fait l'analyse suivante sur le DL du numérateur : si l'ordre dominant est inférieur ou égal à 3, la fonction ne sera pas définie en 0, tandis que si le coeff dominant est supérieur ou égal 4, on pourra simplifier avec le DL du dénominateur, et on aura le DL à l'ordre 1 du quotient en allant à l'ordre 5 pour le numérateur. Cette analyse faite, lançons-nous en faisant les DL des différents termes à l'ordre 5, puisque l'énoncé suggère que le quotient admet un DL. On a par composition de DL, en 0 :

$$e^{2x}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{6}+\frac{(2x)^4}{24}+\frac{(2x)^5}{120}+o(x^5),$$

et donc, les autres DL faisant partie de la liste des DL à savoir, on a en 0 :

$$\begin{cases} e^{2x}=1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}+\frac{4x^5}{15}+o(x^5)\\ \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\\ \sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\\ \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+o(x^5)\end{cases}$$

En ajoutant tous ces DL, on constate que les terme d'ordre inférieur ou égaux à 3 se simplifient, et on obtient en 0 :

$$e^{2x}-\cos x-2\sin x+5\ln(1-x)+5x=-\frac{5}{8}x^4-\frac{3x^5}{4}+o(x^5).$$

On va également pousser le Dl du dénominateur à l'ordre 5 afin de faire le quotient. Cela ne nécessite pas de calculs : puisque la fonction est paire, on sait qu'il n'y pas de termes d'ordre impaire, et donc on a en 0 :

$$\mathrm{ch}\,x-\sqrt{1+x^2}=\frac{x^4}{6}+o(x^5)=x^4(\frac{1}{6}+o(x))$$

Ainsi, on obtient

$$f(x)=\frac{-\frac{5}{8}x^4-\frac{3x^5}{4}+o(x^5)}{x^4(\frac{1}{6}+o(x))}=(-\frac{5}{8}-\frac{3}{4}x)\times\frac{6}{1+o(x)}=(-\frac{15}{4}-\frac{9}{2}x)(1+o(x))$$
$$=-\frac{15}{4}-\frac{9}{2}x+o(x)$$

4. Le DL précédent indique que f admet une limite en 0 :

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\frac{15}{4},$$

ainsi on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=-\frac{15}{4}$. De plus, toujours avec le DL, on voit que f est dérivable en 0, avec $f'(0)=-\frac{9}{2}$.