DM de vacances
Suites.

Exercice 1 ●○○ — Définition de la limite

Donner la définition de « Une suite (u_n) admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite lorsque $n \to +\infty$ ». Démontrer que la suite définie par $v_n = e^{-n}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 ●●○ — Une suite récurrente

Soit la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. Introduire une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite est bien définie.
2. Montrer que $[1,3]$ est stable par f, et en déduire que la suite (u_n) est bornée.
3. Calculer les premiers termes de la suite, et dire si la suite est monotone.
4. Tracer le graphe de f puis l'utiliser pour tracer les premières valeurs de la suite u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 4$.
5. Montrer par récurrence que la suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est croissante (on pourra d'abord constater que la fonction $h = f \circ f$ est croissante). En déduire la monotonie de la suite $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$.
6. En déduire qu'elles convergent vers deux limites que l'on note ℓ et ℓ'.
7. Montrer ces limites sont solutions de l'équation $h(x) = x$. En déduire $\ell = \ell' = 2$.
8. (Plus dur). Prouvez avec la définition de la limite que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 2.

Exercice 3 ●●○ — Encore une suite de racines

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation

   $$x^n + \ldots + x = 1$$

   d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ admet une unique solution. On note u_n cette solution. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en étudiant le signe de $P_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ a une limite.
4. Pour $x \neq 1$, mettre $x^n + \ldots + x$ sous la forme d'un quotient. En déduire la valeur de la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.