DM de vacances
Suites (Corrigé).

Exercice 1 ●○○ — Définition de la limite

La définition de « Une suite (u_n) admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite lorsque $n \to +\infty$ » est

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \epsilon.$$

Prouvons que la suite (v_n) tend vers 0. Soit $\epsilon > 0$, on résout :

$$|v_n - 0| \leqslant \epsilon \iff e^{-n} \leqslant \epsilon \iff n \geqslant -\ln(\epsilon).$$

Ainsi, si on pose $N = \lfloor -\ln \epsilon \rfloor + 1$, on a bien

$$\forall n \geqslant N, \quad |v_n - 0| \leqslant \epsilon.$$

Cela prouve que (v_n) tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2 ●●○ — Une suite récurrente

Soit la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. Introduire une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite est bien définie.
2. Montrer que $[1, 3]$ est stable par f, et en déduire que la suite (u_n) est bornée.
3. Calculer les premiers termes de la suite, et dire si la suite est monotone.
4. Tracer le graphe de f puis l'utiliser pour tracer les premières valeurs de la suite u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 4$.
5. Montrer par récurrence que la suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est croissante (on pourra d'abord constater que la fonction $h = f \circ f$ est croissante). En déduire la monotonie de la suite $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$.
6. En déduire qu'elles convergent vers deux limites que l'on note ℓ et ℓ'.
7. Montrer ces limites sont solutions de l'équation $h(x) = x$. En déduire $\ell = \ell' = 2$.
8. (Plus dur). Prouvez avec la définition de la limite que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 2.

Correction

1. Introduisons la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On a

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) \in]0, +\infty[,$$

ce qui prouve que $]0, +\infty[$ est stable par f. Comme $u_0 \in]0, +\infty[$, la suite est bien défnie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. On a

$$f(1) = 3 \quad \text{et} \quad f(3) = \frac{5}{3},$$

ainsi, puisque f est décroissante sur $[1, 3]$, on a

$$\forall x \in [1, 3], \quad 1 < \frac{5}{3} \leqslant f(x) \leqslant 3.$$

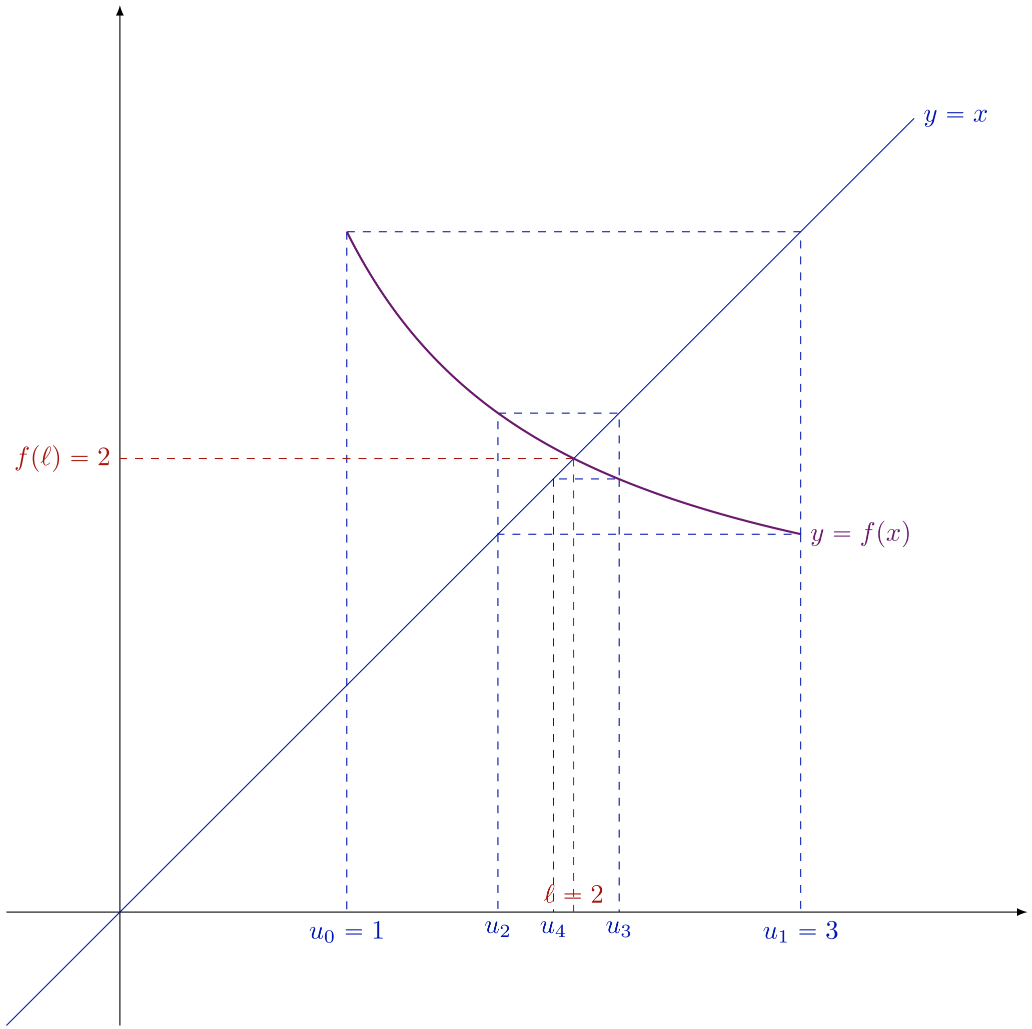
Cela prouve que $f([1, 3]) = [\frac{5}{3}, 3] \subset [1, 3]$ et donc que $[1, 3]$ est stable par f. Puisque $u_0 \in [1, 3]$, on déduit par une récurrence élémentaire que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [1, 3].$$

Cela prouve que la suite est bornée.

3. On a $u_1 = f(1) = 3 > u_0$ puis $u_2 = f(u_1) = f(3) = \frac{5}{3} < u_1$. Ainsi la suite n'est ni croissante ni décroissante.

4. On complète la question précédente en calculant $u_3 = f(u_2) = \frac{11}{5}$. On applique la méthode du cours pour tracer la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à partir du graphe de f :



Cette méthode porte le nom pédagogique de « méthode de l'escargot », dû à la forme de spirale du chemin de construction de la suite (u_n).

5. Pour y voir plus clair, posons $v_n = u_{2n}$. On a alors $v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$.Pour montrer que cette suite est croissante, on doit montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_{2n} < u_{2n+2}$. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ » et montrons qu'elle est vraie par récurrence.

Initilisation : On a vu que $u_0 = 1$ et $u_2 = \frac{5}{3}$ donc la proriété est vérifiée au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$, supposons la propriété vraie au rang n , à savoir $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$. On applique deux fois la fonction f en ayant en tête sa décroissance, ce qui revient à appliquer la fonction $h = f \circ f$, qui est croissante par composition :

$$\begin{aligned} & u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \\ \Longrightarrow\ & h(u_{2n}) \leqslant h(u_{2n+2}) \\ \Longleftrightarrow\ & u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4} \\ \Longleftrightarrow\ & u_{2(n+1)} \leqslant u_{2(n+2)} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée, et donc que la propriété est héréditaire.
Pour y voir plus clair, posons $w_n = u_{2n+1}$. On a alors $w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3}$. On applique f à l'inégalité $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ et on trouve en utlisant la décroissance de f :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3}$$

ce qui prouve que la suite $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est décroissante

6. Ces deux suites sont monotones et bornées, donc d'après le théorème de la limite monotone, elles convergent vers deux limites, que l'on note ℓ et ℓ'.

7. Par définition la suite $(v_n) = (u_{2n})$ vérifie

$$\forall n \geqslant 0, \quad v_{n+1} = u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = h(v_n).$$

La fonction h étant continue par composition, on passe à la limite dans cette équation, on obtient, puisque la suite (v_n) converge vers ℓ :

$$h(\ell) = \ell.$$

Puisque la suite $(w_n) = (u_{2n+1})$ vérifie la même relation de récurrence, on a de même $h(\ell') = \ell'$. Résolvons donc cette équation, pour cela on détermine h :

$$h(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{2}{f(x)} = 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 1 + \frac{2}{\frac{x+2}{x}} = 1 + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x+2}{x+2}.$$

Ainsi, on a

$$h(\ell) = \ell \iff 3\ell + 2 = \ell(\ell+2) \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0.$$

Cette équation a deux solutions, 2 et -1, mais comme on cherche des solutions dans $]0, +\infty[$, on a une unique solution : $\ell = 2$. On a donc aussi $\ell' = 2$.

8. C'est une question théorique, à la limite de notre programme. On a vu dans le cours que si une suite converge, ses suites extraites convergent aussi, et vers la même limite. Mais ici, on est dans une forme de réciproque : on a les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui convergent vers la même limite $\ell = 2$, et on doit en déduire que (u_n) converge vers 2.
Soit $\epsilon > 0$, par définition de la convergence de ces suites extraites, on a

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, & |u_{2n} - 2| \leqslant \epsilon \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, & |u_{2n+1} - 2| \leqslant \epsilon \end{cases}$$

Soit $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $n \geqslant N$, alors

- Ou bien n est pair, on l'écrit $n = 2p$ pour y voir plus clair. On a bien $n \geqslant 2N_1$ et donc $p \geqslant N_1$, et donc $|u_{2p} - 2| \leqslant \epsilon$.
- Ou bien n est impair, on l'écrit $n = 2p+1$ pour y voir plus clair. On a bien $n \geqslant 2N_2 + 1$ et donc $p \geqslant N_2$, et donc $|u_{2p+1} - 2| \leqslant \epsilon$.

Dans les deux cas, on a bien $|u_n - 2| \leqslant \epsilon$.
On a montré que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad |u_n - 2| \leqslant \epsilon,$$

ce qui prouve que la suite (u_n) tend vers 2.

Exercice 3 ●●○ Encore une suite de racines

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation

$$x^n + \ldots + x = 1$$

d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ admet une unique solution. On note u_n cette solution. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en étudiant le signe de $P_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ a une limite.
4. Pour $x \neq 1$, mettre $x^n + \ldots + x$ sous la forme d'un quotient. En déduire la valeur de la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Correction

1. Notons P_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $P_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$. La fonction P_n est une somme de fonctions strictement croissantes sur $[0, +\infty[$ (en cas de doute, dérivez-là), elle est donc strictement croissante, et elle est continue (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$, en tant que polynôme. On a de plus

$$P_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = +\infty.$$

Elle est donc bijective de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ d'après le théorème de la bijection. Ainsi, l'équation $P_n(x) = 1$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.
Par définition, u_1 est solution de $P_1(x) = x = 1$ et donc $u_1 = 1$.
De même, on a pour tout $x \geqslant 0$ que $P_2(x) = x^2 + x$ et donc u_2 est solution de

$$x^2 + x = 1 \quad \text{et} \quad x \geqslant 0.$$

Après un calcul de discriminant, on trouve

$$u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. Notons que pour $x \in]0, +\infty[$, on a

$$P_{n+1}(x) > P_n(x),$$

en d'autres termes, la suite $(P_n(x))_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante. Ainsi, on a

$$P_{n+1}(u_n) > P_n(u_n) = 0 = P_{n+1}(u_{n+1}).$$

Or d'après le théorème de la bijection, la fonction réciproque P_{n+1}^{-1} est strictement croissante. On déduit que $u_n > u_{n+1}$, et donc que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante. (Notez que si on n'a pas montré que P_n est bijectif et/ou qu'on ne souhaite pas utiliser la bijection réciproque, on peut montrer manuellement la décroissance en supposant par l'absurde que $u_n < u_{n+1}$ et en appliquant P_{n+1}).
3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est minorée par 0 et décroissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite $\ell \in [0, +\infty[$.
4. On utilise la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}, \quad x + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1,$$

et donc, puisqu'il est clair que $x = 1$ n'est pas solution, l'équation $P_n(u_n) = 1$ devient

$$\frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n} - 1 = 1.$$

Puisque $u_1 = 1$ est que la suite est srictement décroissante, on sait que $\ell \in [0, 1[$. On veut passer à la limite dans l'équation précédente, on note d'abord que

$$0 < u_n^{n+1} < u_2^{n+1}$$

et comme $0 < u_2 < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_2^{n+1} = 0$, (suite géométrique de raison u_2), puis par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0.$$

On déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n} - 1 = \frac{1}{1-\ell} - 1.$$

Ainsi, par passage à la limite, la limite ℓ vérifie l'équation

$$\frac{1}{1-\ell} - 1 = 1$$

et donc après résolution on trouve que $\ell = \frac{1}{2}$.