DST 1

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 2 pages et 6 exercices indépendants.

Exercice 1 - Moments du cosinus. Calculer $\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 - Autour de $\frac{\pi}{8}$. On pose $x = \cos\frac{\pi}{8}$.

1. Justifier que $x > 0$.
2. En exprimant $\frac{\pi}{4}$ en fonction de $\frac{\pi}{8}$, montrer que x vérifie l'équation
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2x^2 - 1.$$
3. En déduire que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$, puis la valeur de $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 3 - Superposition de signaux.

1. **Question de cours** : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $r > 0$, et $\phi \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π, que l'on caractérisera, tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \phi).$$
2. **a.** Soient les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$S_1(t) = \sqrt{2}\cos(3t) \quad \text{et} \quad S_2(t) = \sqrt{2}\sin(3t).$$
Trouver $r_0 > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_1(t) - S_2(t) = r_0\cos(3t - \varphi).$$
b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équations
$$S_1(t) = S_2(t),$$
d'inconnue $t \in \mathbb{R}$. Donner au moins deux valeurs explicites solutions.

c. Déterminer des constantes $\omega \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $r_1 > 0$ et $\varphi_1 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (S_1(t) - S_2(t))^2 = A + r_1\cos(\omega t - \varphi_1).$$

3. a. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 9y = 0, \tag{1}$$

d'inconnue une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b. En déduire que la fonction $S_1 - S_2$ de la question 2a) est solution de l'équation différentielle.

c. Donner une solution de l'équation différentielle (1) qui vérifie de plus $y(-\frac{\pi}{12}) = 1$. On pourra s'aider de la question 1a). En voyez-vous d'autres ?

Exercice 4 - Logarithme et polynôme. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - 9.$$

1. Tracer le tableau de variation de la fonction f, et résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 9)$, puis calculer sa dérivée.

Exercice 5 - Une équation différentielle. On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - y(t) = e^{-2t}. \tag{2}$$

1. Définir et résoudre l'équation homogène associée à (2).
2. Trouver une solution particulière de (2). On pourra chercher les solutions sous la forme $t \mapsto \alpha e^{-2t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2).
4. Montrer qu'il y a une unique solution de (2) qui vérifie de plus $y'(0) = 1$.
5. Déterminer les solutions de (2) qui vérifient de plus la condition $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Exercice 6 - Un peu de complexes. Soit les nombres complexes $z_A = 1 + i$ et $z_B = 3 - i$.

1. Représenter A et B, les points images de z_A et z_B dans le plan complexe.
2. Donner les formes algébriques des complexes $z_A + z_B$, $z_A \times z_B$ et $\frac{z_A}{z_B}$.
3. Calculer $|z_A|$ et $|z_B|$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $z = x + iy$, avec x et y dans $\mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que $z^2 - z_A^2 \in \mathbb{R}$. On pourra mettre $z^2 - z_A^2$ sous forme algébrique. Représenter l'ensemble des complexes z qui vérifie cela dans le plan complexe.