DST 2
Corrigé

Exercice 1 - Image du cercle par une homographie. On a $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}})=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ donc

$$(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})^8=\frac{1}{\sqrt{2}^8}e^{-\frac{8i\pi}{4}}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}.$$

Exercice 2 - Une « parabole tangente ».

1. Etudions la différence $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$D(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}.$$

On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad D'(x)=-\sin x+x,$$

puis

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad D''(x)=-\cos x+1.$$

Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\cos x\leqslant 1$. Ainsi, $D''\geqslant 0$ et donc D' est croissante sur $\mathbb{R}$. Or $D'(0)=0$. Ainsi, on a

$$x\geqslant 0\iff D'(x)\geqslant 0,$$

ce qui se lit bien sur le tableau de variation. Ainsi D est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Son minimum est donc atteint en $x=0$ (voir encore une fois le tableau de variation) :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad D(x)\geqslant D(0).$$

Or $D(0)=0$. Cela prouve que

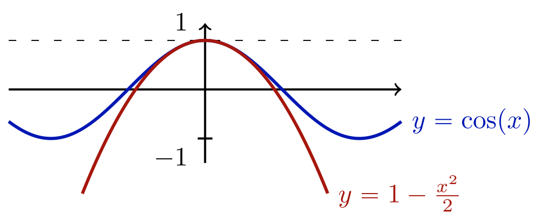
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad D(x)\geqslant 0,$$

et donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 1-\frac{x^2}{2}\leqslant\cos x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$D''(x)$		$+$	
$D'(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $-\infty$
$D(x)$	↘	0	↗

2. On trace ces deux fonctions, en notant que la fonction $x\mapsto 1-\frac{x^2}{2}$ est une parabole tournée vers le bas, paire, qui a pour maximum 1, atteint en $x=0$:



Exercice 3 - Image du cercle par une homographie. Notons que

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} = \frac{|z|^2 - 1 + \overline{z} - z}{|z-1|^2}$$

Or $\overline{z} - z = -2i\,\mathrm{Im}(z) \in i\mathbb{R}$, donc au final :

$$\mathrm{Re}(\frac{z+1}{z-1}) = \frac{|z^2|-1}{|z-1|^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(\frac{z+1}{z-1}) = 0 \iff |z|^2 = 1.$$

Remarque : On pouvait très bien écrire $z = x + iy$, et aboutir à $x^2 + y^2 = 1$. On pouvait même raisonner en deux temps en passant en forme exponentielle.

Exercice 4 - Un peu de géomérie. Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Introduisons les nombres complexes $a = 1 - 2i$ et $b = -1 + 3i$. Notons leurs points images A et B. Alors, si on note M le point image de z, on a

$$|\frac{z-1+2i}{z+1-3i}| = 1 \iff |\frac{z-a}{z-b}| = 1 \iff \frac{AM}{BM}.$$

Ainsi, z vérifie l'équation si et seulement si M est sur la médiatrice du segment $[AB]$. On peut noter que le milieu de ce segment est $I = (0, \frac{1}{2})$.

2. Avec la même notation,

$$\arg(\frac{z-1+2i}{z+1-3i}) = \pi \iff (\vec{AM}, \vec{BM}) = \pi.$$

Ainsi, les points A, B et M sont alignés, mais les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{BM}$ sont de sens opposés. On déduit avec un dessin que la condition équivaut à ce que M appartienne au segment $[AB]$ (mais est différent de A et B).

3. **a.** La relation indique que la distance euclidienne entre les points d'affixe a et z vaut r. Il s'agit donc du cercle de centre a et de rayon r.

   b. Par identification,

$$a = -\frac{2+i}{1-i} = -\frac{(2+i)(1+i)}{2} = -\frac{1+3i}{2}$$

   c. On a donc

$$|(1-i)z + 2 + i| = 1 \iff |(1-i)(z-a)| = 1 \iff |1-i||z-a| = 1 \iff |z-a| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   Les solutions de l'équations sont les complexes dont l'image est sur le cercle de centre a et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$. Notons M_1, M_2 et A les points d'affixe respectoives z, z^2 et $2 + 2i$. Alors ces points forment un triangle rectangle isocèle en M_1 si et seulement si le vecteur $\vec{M_1M_2}$ est l'image de $\vec{M_1A}$ par une rotation de centre M_1 et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$. Puisque les affixes de ces vecteurs sont $z^2 - z$ et $(2 + 2i - z)$, on obtient comme condition nécessaire et suffisante

$$z^2 - z = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}(2 + 2i - z)$$

c'est-à-dire

$$z^2 + (i-1)z + 2 - 2i = 0 \text{ ou } z^2 + (-i-1)z - 2 + 2i = 0.$$

On a donc au plus quatre possibilités. Il faut résoudre ces deux équations pour montrer qu'elles sont distinctes.

Exercice 5 - Maîtriser les puissances trigos.

1. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, on a la formule d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

   et donc

$$\sin x = \frac{1}{2^4 i^4}(e^{ix} + e^{-ix})^4 = \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{-ix})^4.$$

   On applique la formule du binôme, après avoir déterminé les coefficients, par exemple avec le triangle de pascal :

$$(e^{ix} - e^{-ix})^4 = (e^{ix})^4 - 4(e^{ix})^3 e^{-ix} + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 - 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4$$

$$\begin{aligned}&= e^{4ix} - 4e^{3ix} + 6 - 4e^{-3ix} + e^{-4ix}\\ &= 6 - 4(e^{3ix} + e^{-3ix}) + (e^{4ix} + e^{-4ix})\\ &= 6 - 8\cos(3x) + 2\cos(4x)\end{aligned}$$

Et donc

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(3 - 4\cos(3x) + \cos(4x)\right).$$

b. On sait que pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\int^x \cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\sin(ax),$$

et donc en utilisant la linéarisation :

$$\begin{aligned}\int^x \sin^4 t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{8}\left(3\int^x \mathrm{d}t - 4\int^x \cos(3t)\,\mathrm{d}t + \int^x \cos(4t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(3x - \frac{4}{3}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(4x)\right)\end{aligned}$$

2. **a.** On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad (\cos x + i\sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = (\cos(nx) + i\sin(nx)).$$

b. On a donc avec la formule du binôme de Newton :

$$\cos(5x)+i\sin(5x) = (\cos x+i\sin x)^5 = \cos^5 x+5i\cos^4 x\sin x-10\cos^3 x\sin^2 x-10i\cos^2\sin^3 x+5\cos x\sin^4 x+i\sin^5 x.$$

En identifiant les parties imaginaires :

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x\\ &= 5(1-\sin^2 x)^2\sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x\\ &= 16\sin^5(x) - 20\sin^3 x + 5\sin x.\end{aligned}$$

c. Posons $y = \sin(\frac{\pi}{5})$. En évaluant cette identité pour $x = \frac{\pi}{5}$, on obtient

$$\sin(\pi) = 0 = 16y^5 - 20y^3 + 5y.$$

Puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, on sait que $y > 0$, et donc en simplifiant par y :

$$16y^4 - 20y^2 + 5 = 0.$$

Il s'agit d'une équation bicarrée sur y. Introduisons le polyôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = 16X^2 - 20X + 5$. On a donc $P(y^2) = 0$, donc on va chercher les racines de P. Son discriminant vaut $\Delta = 400 - 4 \times 16 \times 5 = 400 - 320 = 80$. On a $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$, les racines de P sont donc

$$X_1 = \frac{20 - 4\sqrt{5}}{32} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}\quad .$$

Ces deux racines sont positives, on a donc, puisque y^2 est racine de P :

$$y = \pm\sqrt{X_1} \quad \text{ou} \quad y = \pm\sqrt{X_2}.$$

Or on a vu que $y > 0$, on a donc

$$y = \sqrt{X_1} \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{X_2}.$$

Pour faire le choix entre ces deux possibilités, il faut prolonger l'analyse en localisant plus précisément y : on a

$$0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$$

et donc par stricte croissance du sinus sur $[0, \frac{\pi}{4}]$:

$$0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or on a $X_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ d'où $\sqrt{X_2} > \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On peut donc conclure :

$$y = \sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{X_1} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}.$$

Exercice 6 - En passant par les racines n-ièmes.

1. (Question préliminaire). Pour $x \in]0,\pi[$, on définit la cotangente de x par la formule

$$\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

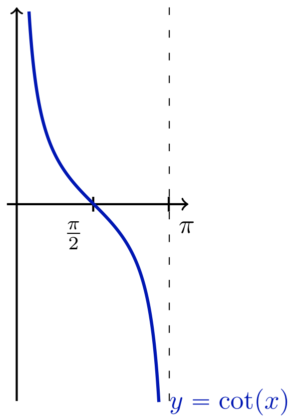
Sur $]0,\pi[$, le sinus ne s'annule pas, et on peut bien définir le quotient $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$. Sa dérivée vérifie

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad \cot'(x) = \frac{-\sin x \times \sin x - \cos x \times \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

La fonction cot est donc strictement décroissante sur $]0,\pi[$. On a de plus

$$\lim_{x\to 0^+} \cot(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pi^-} \cot(x) = -\infty.$$

Les droites $x = 0$ et $x = \pi$ sont donc asymptotes verticales à la courbe de cot. On note finalement que $\cot(\frac{\pi}{2}) = 0$, et on peu tracer la courbe :



On pourrait montrer que le graphe a un centre de symétrie en $\frac{\pi}{2}$, en calculant $\cot(\frac{\pi}{2} + x)$ et $\cot(\frac{\pi}{2} - x)$ pour $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

2. Voir cours

3. L'équation est

$$(z+i)^n = (z-i)^n, \tag{1}$$

a. Lorsque $n = 2$, on peut résoudre l'équation directement :

$$(z+i)^2 = (z-i)^2 \iff z^2 + 2iz - 1 = z^2 - 2iz - 1 \iff 4iz = 0 \iff z = 0$$

b. En prenant le module de l'équation, on obtient que

$$|z+i|^n = |z-i|^n,$$

et puisque les module sont positifs :

$$|z+i| = |z-i|.$$

Soit A et B les poins d'affixe respective i et $-i$, c'est-à-dire $A = (0,1)$ et $B = (0,-1)$. Soit M d'affixe z, on déduit de l'égalité précédente que

$$BM = AM,$$

donc que M est sur la médiatrice du segment $[AB]$, donc sur l'axe réel. Donc z est réel.
Le nombre $z = 0$ est solution si et seulement si

$$\begin{aligned} & i^n = (-i)^n = (-1)^n i^n \\ \iff & 1 = (-1)^n \text{ car } i^n \neq 0 \\ \iff & n \text{ est pair.} \end{aligned}$$

c. On a, puisque $z \neq i$:

$$(z+i)^n = (z-i)^n \iff \frac{(z+i)^n}{(z-i)^n} = 1 \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Ainsi, z est solution de (1) si et seulement si $\frac{z+i}{z-i}$ est solution de $X^n = 1$.

d. On déduit de la question de cours que z est solution de (1) si et seulement si il existe un entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Or
$$\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff z+i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i)$$

e. Pour chaque entier k entre 0 et $n-1$, on résout l'équation précédente. Notons que si $k=0$, l'équation devient
$$z+i = z-i$$
et elle n'a pas de solution.
Supposons maintenant $k \neq 0$, alors
$$z+i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i) \iff z(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = -i(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \iff z = -i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$
On va transformer cette quantité avec la technique de l'angle moitié :
$$\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)} = \frac{2\cos(\frac{k\pi}{n})}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})}.$$
On conclut : z est solution si et seulement si il existe $k \in [|1, n-1|]$ tel que
$$z = \frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} = \cot(\frac{k\pi}{n}).$$

f. Il n'est pas évident que les nombres $\cot(\frac{k\pi}{n})$ pour $k \in [|1, n-1|]$ sont distincts. On utilse la question préliminaire : la fonction cot étant strictement décroissante sur $]0,\pi[$, puisque $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$ pour $k \in [|1, n-1|]$, les nombres $\cot(\frac{k\pi}{n})$ forment bien $n-$ nombres distincts.
Lorsque $n = 4$, on trouve comme ensemble de solution
$$\{\cot(\frac{\pi}{4}), \cot(\frac{\pi}{2}), \cot(\frac{3\pi}{4})\} = \{1, 0, -1, \}$$

Exercice 7 - Equation à paramètre.

1. (Question préliminaire) On utilise $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:
$$\sin^4\theta + 4\cos^2\theta = (1-\cos^2\theta)^2 + 4\cos^2\theta = 1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta + 4\cos^2\theta = 1 + 2\cos^2\theta + \cos^4\theta = (1+\cos^2\theta)^2.$$
et donc
$$\sqrt{\sin^4\theta + 4\cos^2\theta} = \sqrt{(1+\cos^2\theta)^2} = |1+\cos^2\theta| = 1+\cos^2\theta,$$
en notant que $1+\cos^2\theta > 0$ pour enlever la valeur absolue.

2. On calcule le discriminant de l'équation :
$$\Delta = -4\sin^2\theta + 8i\cos\theta.$$
Puisque $\Delta \in \mathbb{C}$, on doit maintenant résoudre l'équation $\delta^2 = \Delta$, d'inconnue $\delta \in \mathbb{C}$. Si on cherche δ sous forme algébrique $\delta = a+ib$, on obtient
$$\delta^2 = a + 2ib - b^2 = -4\sin^2\theta + 8i\cos\theta,$$
et donc en identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve que δ est solution si et seulement si :
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -4\sin^2\theta, \\ 2ab = 8\cos\theta. \end{cases}$$
On a également
$$|\delta^2| = a^2 + b^2 = |\Delta| = 4|\sin^2\theta + 2i\cos\theta| = 4\sqrt{\sin^2\theta + 4\cos^2\theta},$$
et donc avec la question préliminaire :
$$a^2 + b^2 = 4(1+\cos^2\theta).$$
En soustrayant la première équation, on déduit
$$2b^2 = 4(1+\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 8 \iff b = \pm 2,$$

puis en ajoutant la première :

$$2a^2 = 4(1+\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 8\cos^2\theta \iff a = \pm 2\cos\theta.$$

On se sert alors de l'équation $ab = 4\cos\theta$ pour conclure : les solutions sont

$$(a,b) = (2\cos\theta, 2) \text{ et } (a,b) = (-2\cos\theta, -2),$$

et l'équation a deux solutions opposées :

$$\delta_+ = 2\cos\theta + 2i \text{ et } \delta_- = -2\cos\theta - 2i.$$

Les solutions de l'équation initiales sont alors

$$\frac{-2i\sin\theta - (2\cos\theta + 2i)}{2} = -\cos\theta + i(-\sin\theta - 1) \text{ et } \frac{-2i\sin\theta + (2\cos\theta + 2i)}{2} = \cos\theta + i(-\sin\theta + 1)$$

Exercice 8 - Sommes géométriques et leurs copines. Le but de l'exercice est de calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$, les sommes

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad S_1(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k \text{ et } S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2x^k.$$

1. On a

$$S_0(1) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \quad \text{(nombres de termes, tous égaux à 1).}$$

De même, en appliquant le cours :

$$S_1(1) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } S_2(1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Voir cours.

3. On dérive S_0, d'un côté, on sait que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_0'(x) = \sum_{k=1} kx^{k-1}.$$

Notez que la somme démarre bien à $k = 1$ puisque le premier terme correspondant à $k = 0$ vaut 1 et a une dérivée nulle. D'un autre côté on a $S_0(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, et donc en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad S_0'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Puis

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad S_1(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{x\left(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right)}{(x-1)^2}.$$

4. En dérivant deux fois, on obtient pour $n \geqslant 2$, après calculs : :

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad S_0''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{n(1-n)x^{n+1} + 2(n+1)(n-1)x^n - n(n+1)x^{n-1} + 2}{(x-1)^3}.$$

Puis on constate que

$$x^2S_0''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^k = \sum_{k=2}^{n} k^2x^k - \sum_{k=2}^{n} kx^k = (S_2(x) - x) - (S_1(x) - x - 1),$$

et donc

$$S_2(x) = S_1(x) - 1 + x^2S_0''(x).$$

On peut déduire la valeur exacte de S_2.