

DST 4

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 2 pages et 4 exercices indépendants

Exercice 1 :**Partie I :**

1) Résoudre sur \mathbb{R} le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + 2x y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2) On désigne par f la solution du problème de Cauchy. Déterminer la dérivée f' ainsi que la dérivée seconde f'' .

3) Déterminer $\max_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|$

4) a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

b) Soit ϵ un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un réel η strictement positif, que l'on explicitera, tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

5) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = f(x) \times P_n(x)$$

où $f^{(n)}$ est la dérivée n^{eme} de f et P_n une fonction polynomiale de degré n .

Partie II :

Dans cette partie, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + 2x y = \frac{2x + 9}{x^2 + 8x + 17} e^{-x^2} \\ y(-4) = 1 \end{cases}$$

1) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2x+9}{x^2+8x+17} = \frac{2x+8}{x^2+8x+17} + \frac{1}{x^2+8x+17}$

2) En déduire une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $g : x \mapsto \frac{2x+9}{x^2+8x+17}$

3) Résoudre le problème de Cauchy.

Partie III :

1) Résoudre sur \mathbb{R} le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2\text{sh}(x) \\ y(1) = -\frac{1}{4}e^{-1} + \frac{7}{2}e^1 \\ y'(1) = \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{13}{2}e^1 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit m un réel et (\mathcal{S}_m) le système suivant :

$$(\mathcal{S}_m) : \begin{cases} x + y - mz = m - 1 \\ mx + y + m^2z = 1 \\ m^2x + my - m^2z = 0 \end{cases}$$

1) Soit $m = 1$.

Résoudre (\mathcal{S}_1) .

2) Résoudre le système (\mathcal{S}_m) en discutant suivant la valeur du paramètre réel m (vous vérifierez que pour $m = 1$, vous retrouvez le résultat de la question 1).

Exercice 3 :

Partie I : Convergence

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{10} (u_n^3 - 7u_n^2 + 10u_n) \\ u_0 = 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On considère la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{10} (x^3 - 7x^2 + 10x)$ définie sur $[1 ; 3]$

a) Montrer que : $f' : x \mapsto \frac{1}{10} (3x^2 - 14x + 20)$

b) En déduire les variations de f sur $[1 ; 3]$.

c) Déterminer $f([1 ; 3])$ et en déduire que $f([1 ; 3]) \subset [1 ; 3]$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

3) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite notée l .

4) Justifier que l satisfait l'équation : $l^3 - 7l^2 + 10l = 0$

5) En déduire la limite l .

Partie II : Vitesse de convergence

1) Montrer que : $\max_{t \in [1;3]} |f'(t)| = \frac{9}{10}$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - l| \leq 0,9|u_{n-1} - l|$

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq (0,9)^n$

4) En déduire à partir de quel rang n on peut affirmer que $|u_n - l| \leq 10^{-5}$

(Valeurs : $\ln(10) \approx 2,3$ et $\ln(0,9) \approx -0,1$)

Exercice 4 :

Partie I : Quelques limites

Soient $f : x \mapsto \frac{\sqrt{9x^2+2x+5} - (3x+1)}{x-1}$ et $g : x \mapsto \frac{\text{Arcsin}(x)}{x}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) La fonction f peut-elle être prolongée par continuité ?
Si oui, donner un tel prolongement. Si non, justifier.
- 3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 4) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
- 5) La fonction g peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?
Si oui, donner un tel prolongement. Si non, justifier.

Partie II : Primitive...

On se propose de déterminer une primitive de $f : x \mapsto \sqrt{9x^2 + 2x + 5}$ sur \mathbb{R} .

- 1) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{9t^2 + 2t + 5} = \sqrt{9\left(t + \frac{1}{9}\right)^2 + \frac{44}{9}}$$

- 2) En effectuant le changement de variable $u = \frac{9t+1}{\sqrt{44}}$, montrer que :

$$\int^x \sqrt{9t^2 + 2t + 5} dt = \frac{44}{27} \int^{\frac{9x+1}{\sqrt{44}}} \sqrt{u^2 + 1} du$$

- 3) On admettra dans la suite que :

$$u = \text{sh}(w) \Leftrightarrow w = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$$

Effectuer le changement de variable $u = \text{sh}(w)$ et montrer que :

$$\frac{44}{27} \int^{\frac{9x+1}{\sqrt{44}}} \sqrt{u^2 + 1} du = \frac{44}{27} \int^{\ln\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}} + \sqrt{\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\right)^2 + 1}\right)} \text{ch}^2(w) dw$$

- 4) On admettra que :

- $\forall w \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(w) = \frac{1}{2} (\text{ch}(2w) + 1)$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \text{sh}\left(2 \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})\right) = 2y\sqrt{y^2 + 1}$

En déduire que :

$$\int^x \sqrt{9t^2 + 2t + 5} dt = \frac{1}{54} \left((9x + 1)\sqrt{(9x + 1)^2 + 44} + 44 \ln\left(9x + 1 + \sqrt{(9x + 1)^2 + 44}\right) \right)$$