Interro de calcul 9
Développements limités – Corrigé

Ceci est un entrainement.

Question 1 : On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On a $\dfrac{x^2+x}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x}{x^2} = 1$, et ainsi $x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$. Par contre, on a $\dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = +\infty$. On n'a pas le deuxième équivalent. Cet exemple rappelle que l'on ne peut pas composer des équivalents avec une fonction donnée quelconque en général.

Question 2 : On effectue les DL des deux facteurs en 0, à l'ordre 3 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On fait le produit, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 3 :

$$\begin{aligned}\cos x \times \ln(1-x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \times \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

Notez que pour que ce calcul soit rigoureux, il est impératif de mettre $o(x^3)$ dans le DL de $\cos x$ et pas seulement $o(x^2)$.

Question 3 : On pose $u = x^3$, qui tend bien vers 0 lorsque $x \to 0$. On a le DL suivant en 0, incontournable :

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^3 + x^6 + o(x^6).$$

Question 4 : Puisqu'il s'agit d'un produit et d'une quotient de fonctions, des équivalents suffisent, et on n'a pas besoin de faire des DL. On a :

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \text{ et donc } \sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

On a aussi

$$\operatorname{Arcsin} u \underset{u\to 0}{\sim} u \text{ et donc } \operatorname{Arcsin} 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x.$$

Par quotient d'équivalent :

$$\frac{\sin^2 x}{\operatorname{Arcsin} 2x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}.$$

On déduit $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{Arcsin} 2x} = 0$.

Question 5 : La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 en un point $a \in \mathbb{R}$ est :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + o((x-a)^2).$$

La version alternative est, avec $x = a + h$:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2).$$

Lorsque $f(x) = e^x$, cela donne en 1 :

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

Question 6 : Vu en TD : on fait les DL de $\ln(1+h)$ et $\frac{1}{1+h}$, en anticipant que puisque $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$, il suffit de faire le DL de $\frac{1}{1+h}$ à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+h)}{1+h} &\underset{h\to 0}{=} (h - \frac{h^2}{2} + o(h^2))\frac{1}{1+h} = (h - \frac{h^2}{2} + o(h^2))(1 - h + o(h)) \\ &\underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} - h^2 + o(h^2) = h - \frac{3}{2}h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Notez que faire le DL de $\frac{1}{1+h}$ à l'ordre 2 n'est pas une erreur : cela génère simplement après produit des termes d'ordres au moins 3, qui sont absorbés par le reste $o(h^2)$.

Question 7 : Voir table des DL. Ne pas oublier le terme de reste !

Question 8 (Seulement si le reste a été fait): Vu en cours :

$$\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))$$

On pose $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et on utilise le DL suivant en 0 :

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - u^2 + o(u^2).$$

Puisque $u^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{4}x^4$, cela donne :

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))^2 + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{4} + o(x^4). \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$