Interro de calcul
Polynômes et DES

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Soit un polynôme P de degré $n \geqslant 0$. Donner le degré de $P(X^3)$ et de $X^m P$, où $m \in \mathbb{N}$.

<u>Correction</u> : On applique la formule pour le degré d'une composée :

$$\deg(P(X^3)) = \deg P \times \deg(X^3) = 3n.$$

On applique la formule pour le degré d'un produit :

$$\deg(X^m P) = \deg(X^m) + \deg P = m + n.$$

Question 2 : Factoriser $X^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ en produit de facteurs irreductibles.

<u>Correction</u> :

- On a sur $\mathbb{R}$, l'identité remarquable à savoir <u>par coeur</u> :

$$\boxed{X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)}.$$

  Or le polynôme $X^2 + X + 1$ est irreductible car de discriminant -3. Ainsi, $X^3 - 1$ n'a qu'une seule racine sur $\mathbb{R}$, 1, et il n'est pas scindé.
- Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss). Le polynômes $X^3 - 1$ a trois racines, à savoir les racines cubiques de l'unité, 1, j et j^2, avec

$$\boxed{j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

  Ainsi on a

$$\boxed{X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2).}$$

Question 3 : Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{2X^3}{(X-1)(X+1)}$ (on n'oubliera pas la partie entière)

<u>Correction</u> : On a $\deg(2X^3) - \deg((X-1)(X+1)) = 1$. Ainsi, on sait que la fraction rationnelle admet une décomposition de la forme

$$\frac{2X^3}{(X-1)(X+1)} = E + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}, \quad \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} a \text{ et } b \in \mathbb{R} \\ E \in \mathbb{R}_1[X] \end{array} \right. ,$$

autrement dit :

$$\frac{2X^3}{(X-1)(X+1)} = \alpha X + \beta + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}, \quad \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} a \text{ et } b \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

On trouve a et b avec la méthode standard :

- On multiplie par $X - 1$, on évalue en le pôle 1. On trouve $\boxed{a = 1}$.
- On multiplie par $X + 1$, on évalue en le pôle -1. On trouve $\boxed{b = 1}$.

Pour la partie entière, on peut effectuer la division euclidienne de $2X^3$ par $(X-1)(X+1)$. Il y a plus rapide :

- On divise par X, on fait tendre X vers $+\infty$. On trouve $\boxed{\alpha = 2}$ (ou : on écrit des équivalents en $+\infty$, sans diviser par X).
- On évalue en 0. On trouve $0 = \beta - a + b = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\beta = 0}$.

Question 4 : Trouver a, b et c tels que

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1}.$$

Correction

- On trouve avec la méthode standard $\boxed{a = 1}$.
- On multiplie par X^2+1, on évalue en le pôle i.

$$bi + c = \frac{1}{i} = -i,$$

et donc par identification

$$\boxed{b = -1} \quad \text{et} \quad \boxed{c = 0}.$$

Question 5 : Trouver des réels a_1, a_2 et b tels que

$$\frac{1}{X^2(X-1)} = \frac{a_1}{X^2} + \frac{a_2}{X} + \frac{b}{X-1}.$$

Correction

- On trouve avec la méthode standard $\boxed{b = 1}$.
- De même, on multiplie par X^2 et on évalue en 0. on trouve $\boxed{a_1 = -1}$.
- Pour le dernier terme, on multiplie par X, et on fait tendre X vers $+\infty$. On trouve $0 = a_2 + b$ et donc $\boxed{a_2 = -1}$.

Question 6 (Le petit bonus) : Soient les deux points du plan $A = (-1, -3)$ et $B = (2, 3)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB). En donner un vecteur normal et calculer sa distance à l'origine. **Correction** (Fait en DS). Un point $M(x, y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB} = (3, 6)$ et $\overrightarrow{AM} = (x+1, y+3)$ sont colinéaires. On déduit :

$$M \in (AB) \iff [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = 0 \iff 3(y+3) - 6(x+1) = 0 \iff -2x + y + 1 = 0 \iff \boxed{y = 2x - 1}.$$

On lit un vecteur normal sur l'équation de la droite $\vec{n} = (-2, 1)$.

La distance à l'origine est donnée par

$$d(O, (AB)) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$